Chap.9 クリープ・乾燥収縮・温度問題

9.1　クリープに関する例題

例題 9.1-1　クリープと緩和（基本問題）

クリープおよび緩和とはどのような現象かを簡単に述べよ．

解答

図 9.1-1-1(a)に示すように，天井から錘 W を紐で吊るすと瞬時に紐はδ_0だけ伸びるが，W を一定のままにしておくと時間(t)の経過ともに伸びδが増加する．このような現象をクリープ(creep)と呼び，伸びの増加量$\Delta\delta = \delta - \delta_0$をクリープ変形量と呼んでいる（図 9.1-1-1(a),(b)参照）．一方，初期の伸びδ_0で錘を剛な台に固定（9.1-1-1(c)参照）し，伸びδ_0を一定のままに保持すれば，紐の張力Tは初期では W であるが時間の経過とともに減少していく，このような現象を緩和(リラクセーション，relaxation)と呼んでいる（図 9.1-1-1(d)参照）．クリープもリラクセーションも材料の粘性に起因した現象であり，鋼に比べて粘性の強いコンクリートでは，クリープおよびリラクセーションが鋼より大きくなることがよく知られている．

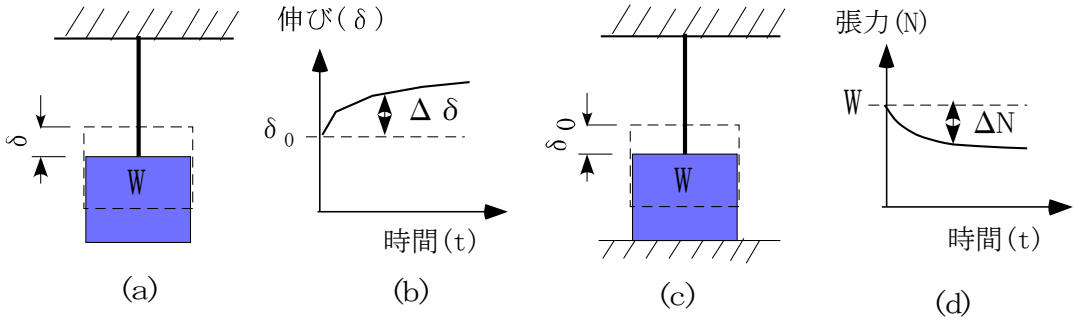

図 9.1-1-1　クリープおよびリラクセーション

例題 9.1-2　クリープひずみの特性と関連用語（基本問題）

クリープおよびリラクセーションを応力－ひずみ関係において表し，それらの特徴を示せ．

解答

図 9.1-2-1 に示すような，静的載荷において直線 0-A-B の応力－ひずみ関係を有する弾性材料において，A 点で応力を一定値σ_0に保持したときに，時間 t の経過とともにひずみが増加する現象がクリープであり，ひずみε_0を一定に保持した時に応力が減少する現象が緩和（リラクセーション）である．また，一定時間の経過後に応力を取り除いたときに，瞬時に戻るひずみε_eは弾性ひずみであり，その後，時間の経過とともに回復するひずみε_{ce}を遅れ弾性ひずみ，回復せず残留するひずみε_{cc}をフローひずみと呼んでいる．すなわち，クリープひずみ(ε_c)は

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{cc} + \varepsilon_{ce} \tag{9.1-2-1}$$

によって与えられる．$\varepsilon_0, \varepsilon_e, \varepsilon_{cc}, \varepsilon_{ce}$の時間的変化を模式的に表せば，図 9.1-2-2 のようになる．すなわち，$t = 0$

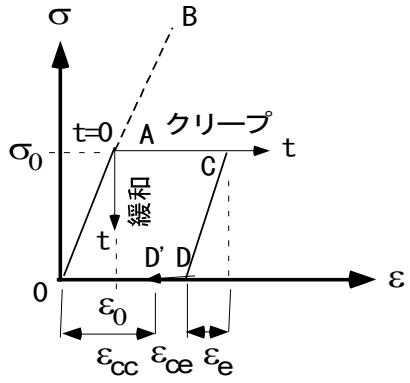

図 9.1-2-1　応力－ひずみ関係

で応力σ_0により弾性ひずみε_eが発生し，σ_0を持続した後，$t=t_1$にて，この応力を除荷すれば瞬時に弾性ひずみε_eが回復し，時間の経過につれて徐々に回復するひずみがε_{ce}，そして最終的に残留するのがε_{cc}である．

持続荷重の載荷開始時(t=0)の弾性ひずみに対するクープひずみの比をクリープ係数$\varphi(t)$と呼んでいる．

すなわち，

$$\varepsilon_c = \varphi(t)\varepsilon_e = \varphi(t)\frac{\sigma_0}{E_{c0}} \qquad (9.1\text{-}2\text{-}2)$$

ここに，E_{c0}はt=0での弾性係数である．$\varphi(t)$は時間の経過とともに増加するが一定値φ_n（$=\varphi(\infty)$）に収束する．φ_nは最終クリープ係数であり，設計ではこれをクリープ係数と呼ぶことが多い．

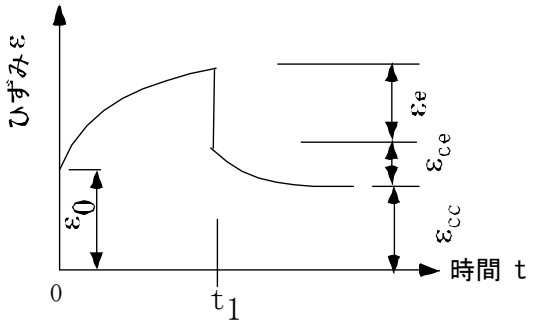

図 9.1-2-2　各ひずみの時間的変化

クリープもリラクセーションも材料の粘性特性に基づく類似の現象であり，構造解析上ではそれらを包括して取り扱われる．

例題 9.1-3　クリープ解析（基本問題，道示関連：共通編）

コンクリート構造物において，クリープ変形解析，およびクリープにともなって発生する応力解析にはどのような特徴を持っているかを簡単に示せ．

解答

コンクリートのクリープひずみ特性は持続荷重の作用開始時の材齢によって異なるので，クリープひずみε_cは材齢t_kとその後の経過時間tの関数，すなわち$\varepsilon_c=\varepsilon_c(t,t_k)$で与えられる．したがって，式(9.1-2-2)より，クリープ係数もt_kおよびtの関数，すなわち$\varphi_c=\varphi_c(t,t_k)$である．

コンクリート部材がいかなる拘束も受けず，自由に伸び縮みできるならば，クリープによって応力が発生することはない．したがって，材齢t_0において応力$\sigma_0(t_0)$が作用し，その後，材齢$t_1,t_2,.....t_n$において，応力増分$\Delta\sigma(t_1),\Delta\sigma(t_2),.....\Delta\sigma(t_n)$を受けた時のクリープひずみは，重ね合わせの原理（ただし，クリープひずみがコンクリートの破壊ひずみより十分に小さな場合で，線形クリープ理論の適用できる範囲）が適用でき，以下のように与えられる．

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_0}{E_c(t_0)}\varphi(t,t_0) + \sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta\sigma(t_i)}{E(t_t)}\varphi(t,t_i) \qquad (9.1\text{-}3\text{-}1)$$

ここに，$E(t_i)$は材齢t_iにおける弾性係数である．すなわち，弾性ひずみε_eとクリープひずみε_cの和である全ひずみεの時間的変化は図 9.1-3-1 のように表せる．

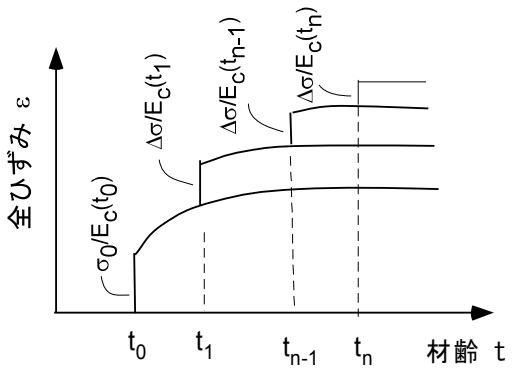

図 9.1-3-1　ひずみの重ね合わせ

一方，鉄筋による拘束や不静定系としての支点拘束があれば，初期応力$\sigma(t_0)$の作用後，クリープひずみを拘束する付加応力が発生し，作用応力が連続的に変化するので，クリープひずみは以下のようになる．

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)}\varphi(t,t_0) + \int_{\sigma(t_0)}^{\sigma(t)}\frac{\varphi(t,\tau)}{E_c(\tau)}d\sigma(\tau) \qquad (9.1\text{-}3\text{-}2)$$

したがって，弾性ひずみとクリープひずみの和は

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_c = \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)}\left[1+\varphi(t,t_0)\right] + \int_{\sigma(t_0)}^{\sigma(t)}\frac{1+\varphi(t,\tau)}{E_c(\tau)}d\sigma(\tau) \qquad (9.1\text{-}3\text{-}3)$$

線形クリープ理論では，同一のコンクリートでは，「単位応力に対するクリープひずみの進行速度は一定である（Whitney の法則として知られている）」より，図 9.1-3-2 において材齢t_0と材齢τのクリープ係数$\varphi(t,t_0)$と$\varphi(t,\tau)$は上下に平行移動の関係にある．したがって，

$$\varphi(t,\tau)=\varphi(t,t_0)-\varphi(\tau,t_0) \qquad (9.1\text{-}3\text{-}4)$$

すなわち，時刻 t（ただし $t>\tau$）での材齢 τ のクリープ係数は，材齢 t_0 での時刻 t のクリープ係数と時刻 τ のクリープ係数の差によって与えられる．

式(9.1-3-3)の積分を増分計算によって行うには，t_0 から求める時刻 t までを微小間隔 Δt で刻み，$t_i=t_0+i\Delta t$ 時刻のひずみは以下のように求められる．

$$\varepsilon(t_i)=\frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)}\left[1+\varphi(t_i,t_0)\right]+\sum_{r=1}^{i-1}\left[\frac{1+\Delta\varphi_r}{E_c(t_r)}\Delta\sigma_r\right] \qquad (9.1\text{-}3\text{-}5)$$

ここに，$\Delta\varphi_r=\varphi(t_i,t_0)-\varphi(t_r,t_0)$，　$\Delta\sigma_r=\sigma(t_r)-\sigma(t_{r-1})$，$t_r=t_0+r\Delta t$．なお，載荷が段階的に行なわれる場合は，時間間隔 Δt は載荷間隔に合わせて採る必要がある．

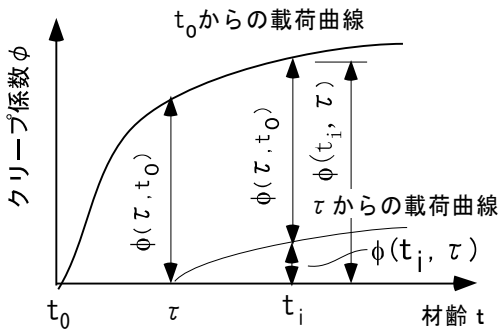

図 9.1-3-2　Whitney の法則

なところで，道路橋示方書 共通編では，コンクリートのクリープひずみ ε_c は，持続的に作用する応力による弾性ひずみに比例し，次式で与えている，

$$\varepsilon_c=\varphi\cdot\sigma_c/E_c \qquad (9.1\text{-}3\text{-}6)$$

ここに，φ：クリープ係数，σ_c：持続的に作用する圧縮応力，E_c：コンクリートのヤング係数である．また，クリープ係数は次式で与えている．

$$\varphi(t,t_0)=\varphi_{d0}\cdot\beta_d(t-t_0)+\varphi_{f0}\{\beta_f(t)-\beta_f(t_0)\} \qquad (9.1\text{-}3\text{-}7)$$

ここに，$\varphi(t,t_0)$：材齢 t_0 にて載荷を開始したコンクリートの材齢 t でのクリープ係数，φ_{d0}：荷重を取り除くと時間とともに回復するひずみ(遅れ弾性ひずみ)に対するクリープ係数で，一般に 0.4 とする，φ_{f0}：荷重を取り除いても回復しないひずみ（フローひずみ）に対するクリープ係数，関数 β_d および β_f は経過時間に関する値でグラフで与えられている（詳細は道路橋示方書を参照のこと）．

また，乾燥収縮ひずみも同様に，

$$\varepsilon_s(t,t_0)=\varepsilon_{s0}\cdot\beta_s(t-t_0) \qquad (9.1\text{-}3\text{-}8)$$

ここに，$\varepsilon_s(t,t_0)$：乾燥開始時の材令 t_0 から任意の材令 t までに発生する乾燥収縮ひずみ量，ε_{s0}：基本乾燥収縮ひずみで，環境条件により定められており，関数 β_s は経過時間に関する値でグラフで与えられている（詳細は道路橋示方書を参照）．

例題 9.1-4　クリープ解析における有効係数法[9.1)]（基本問題）

例題 9.1-3 での式(9.1-3-3)は応力履歴に関する積分を含む構成式であり，これに基づく式(9.1-3-5)による応力増分解析は一般に煩雑であり，コンピュータ解析に頼らねばならない．ところで，応力履歴に関する積分を含まない簡便な解析法として，以下のような式が提案されている[9.1)]．

$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_c=\frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)}\left[1+\varphi(t,t_0)\right]+\Delta\sigma(t)\frac{1+\chi\varphi(t,t_0)}{E_c(t_0)} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}1)$$

ここに，χ は材齢係数と呼ばれ，通常 0.6～0.9 にあると言われている[9.1)]．式(9.1-4-1)の特徴と材齢係数 χ はどのようにして求められたものかを示せ．

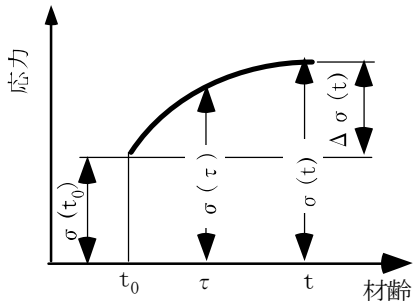

図 9.1-4-1　応力経路

解答

図 9.1-4-1 に示すように，材齢 t_0 から t の間に変化する応力経路をつぎのように表す．

$$\xi_1=\frac{\sigma(\tau)-\sigma(t_0)}{\Delta\sigma(t)} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}2)$$

上式の時間 τ に関する微分より

$$\frac{d\sigma(\tau)}{d\tau}=\Delta\sigma(t)\frac{d\xi_1}{d\tau} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}3)$$

よって，式(9.1-3-3)は以下のように表せる．

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_c = \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)}\left[1+\varphi(t,t_0)\right] + \Delta\sigma(t)\int_{t_0}^{t}\frac{1+\varphi(t,\tau)}{E_c(\tau)}\left(\frac{d\xi_1}{d\tau}\right)d\tau \qquad (9.1\text{-}4\text{-}4)$$

式(9.1-4-4)と式(9.1-4-1)を比較すれば，材齢係数は以下のようになる．

$$\chi(t,t_0) = \frac{E_c(t_0)}{\varphi(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\frac{1+\varphi(t,\tau)}{E_c(\tau)}\left(\frac{d\xi_1}{d\tau}\right)d\tau - \frac{1}{\varphi(t,t_0)} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}5)$$

上式は3つの関数ξ_1，$E_c(\tau)$，$\varphi(t,\tau)$を含んでおり，その内，$E_c(\tau)$と$\varphi(t,\tau)$はコンクリートの品質および環境などによって変化する．また，ξ_1はコンクリートのリラクセーション特性に関係している．図9.1-4-2に示すように$t=t_0$で応力$\sigma_0(t_0)$をかけたときの瞬時の弾性ひずみをε_e（$=\sigma_0(t_0)/E_c(t_0)$）とし，以降このひずみを一定に保ったときの応力を以下のように表すと，

$$\sigma(t) = \varepsilon_e r(t,t_0) \qquad (9.1\text{-}4\text{-}6)$$

ここに，$r(t,t_0)$をリラクセーション関数と言う．$t=t_0$からtまでの減少応力を$\Delta\sigma(t)$として，中間点τでの減少応力を$\Delta\sigma(\tau)$とし，それらの比率を

$$\xi = \frac{\Delta\sigma(\tau)}{\Delta\sigma(t)} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}7)$$

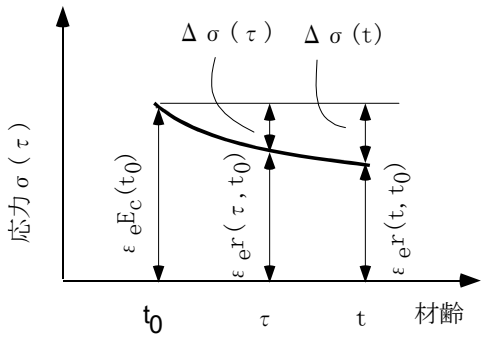

図9.1-4-2　リラクセーション曲線

とすれば，ξは0から1まで変化する応力経路を表す関数で，式(9.1-4-2)のξ_1と類似している．したがって，$\Delta\sigma(t)=\sigma(t)-\sigma_0(t_0)$であるので，式(9.1-4-1)を適用すれば，

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e\left[1+\varphi(t,t_0)\right] + \varepsilon_e\left[r(t,t_0)-E_c(t_0)\right]\frac{1+\chi\varphi(t,t_0)}{E_c(t_0)} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}8)$$

図9.1-4-2のリラクセーション曲線では，$\varepsilon(t)=\varepsilon_e$であるので，上式での$\varepsilon_e$を消去すれば，次式を得る．

$$\chi(t,t_0) = \frac{1}{1-r(t,t_0)/E_0(t_0)} - \frac{1}{\varphi(t,t_0)} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}9)$$

すなわち，材齢係数$\chi(t,t_0)$はリラクセーション関数とクリープ係数によって与えられる関数である．種々のコンクリートの品質と部材形状および相対湿度に対して材齢係数を求めれば，$\chi(t,t_0)$は0.6から0.9の間にあるといわれている[9.1)]．

一方，式(9.1-4-1)をつぎのように表せば，

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0)\frac{1+\varphi(t,t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\Delta\sigma(t)}{\overline{E}_c(t,t_0)} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}10)$$

ここに，

$$\overline{E}_c(t,t_0) = \frac{1}{1+\chi\varphi(t,t_0)}E_c(t_0) \qquad (9.1\text{-}4\text{-}11)$$

したがって，応力増分$\Delta\sigma(t)$により時間$(t-t_0)$に生じるひずみ増分$\Delta\varepsilon(t)$が以下のように表せる．

$$\Delta\varepsilon(t) = \frac{\Delta\sigma(t)}{\overline{E}_c(t,t_0)} \qquad (9.1\text{-}4\text{-}12)$$

$\overline{E}_0(t,t_0)$は時刻とともに変化する見かけの弾性係数を意味し，材料修正係数と呼ばれている．式(9.1-4-12)は応力増分とひずみ増分の関係を与え，この種の式による解析法を**有効係数法**と呼んでいる．有効係数法は，式(9.1-3-5)に基づく解析法に比べて，応力増分が作用する期間に発生するひずみ変化がより簡便に計算できる点に特徴があり広く利用されている．

例題9.1-5　構造系の変化（道示関連：共通編，コンクリートのクリープ・乾燥収縮の影響）

道路橋示方書 共通編では，不静定コンクリート構造物においてコンクリートのクリープの影響により生じる不静定力は，(1)構造系に変化がない場合は考慮しなくてもよいが，(2)構造系が変化する場合は考慮しなければならないとされている．この理由について述べよ．

解答

材齢t_0にて載荷の瞬時に応力σ_0が作用し，以降この応力が持続したとすれば，**例題 9.1-4** の式(9.1-4-10)において$\Delta\sigma(t)=0$であり，ひずみの発生は

$$\varepsilon(t)=\sigma_0(t)\frac{1+\varphi(t,t_0)}{E_c(t_0)} \qquad (9.1\text{-}5\text{-}1)$$

たとえば，コンクリート構造物全体を一度に支保工上で施工し，不静定構造の完成後に載荷が開始され，その後，構造系に変化がない場合は，部材のどの断面でもクリープ係数φは同じであるので，見かけの弾性係数$\overline{E}_c=E_c/(1+\varphi)$の時間的変化はどの断面でも同じになる．

したがって，n 次不静定構造の不静定力をX_i (i=1, 2, 3…, n)としたときの弾性方程式は

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_{ji}X_i=-\delta_{0j} \quad \text{j=1, 2, 3, ……, n} \qquad (9.1\text{-}5\text{-}2)$$

ここに，

$$\delta_{0j}=\int\frac{M_0M_j}{\overline{E}_cI}dx, \quad \delta_{ji}=\int\frac{M_jM_i}{\overline{E}_cI}dx \qquad (9.1\text{-}4\text{-}3)$$

$\overline{E}_c=E_c/(1+\varphi)$を上式に代入すれば，式(9.1-5-2)における$X_i$はクリープ係数φに依存しなくなり，不静定力はクリープの影響を受けないことになる．すなわち，材齢が同じであれば，任意荷重を受ける不静定構造物でも重ね合わせの原理により，クリープ変形に対する拘束力は発生しないといえる．

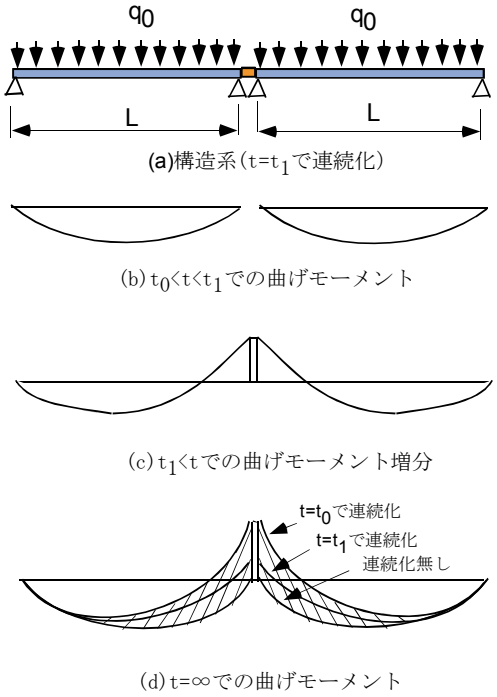

図 9.1-5-1　連続化による曲げモーメント

一方，構造物を一度に施工せず，施工中の構造系に変化がある場合は，構造系に変化があった時点からクリープ変形に対する拘束が発生し，この拘束に抵抗する応力が発生する．たとえば，図 9.1-5-1 に示すような，2 径間連続けたの施工において，最初に，RC 単純げたをかけ，材齢（t_0）で支保工をはずした後に，等分布荷重q_0が作用し始め，その後，材齢(t_1)で中間支点を結合し，2 径間連続げたを施工したとする．$t_0<t<t_1$では，単純げたであるので，クリープによる拘束モーメントは発生しないが，$t>t_1$では連続げたとなるので，クリープによる中間支点での左右のけたのたわみ角の不連続量を打ち消すような拘束モーメントが支点上に発生する．最終時（$t=\infty$）の曲げモーメントは単純げたの曲げモーメントと拘束モーメントの和として，図 9.1-5-1(d)のようになる．拘束モーメントの大きさは連続化時の材齢（t_1）に依存し，最初から連続化して載荷した場合（$t_1=t_0$）は載荷の瞬時に 2 径間連続ばりとしての曲げモーメントになり，クリープによる拘束モーメントは発生しなく，また最後まで連続化しなければ（$t_1=\infty$），単純げたの曲げモーメントのままである．したがって，$t_0<t_1<\infty$での最終時点での曲げモーメントは両者の間（図 9.1-5-1(d)のハッチで施した範囲）にあることが分かる．

道路橋示方書 共通編では，構造系に変化がある場合の不静定反力の変化量の簡易的な算定法として次式を与えている．

$$\Delta R_\varphi=(R_0-R_1)(1-e^{-\varphi}) \qquad (9.1\text{-}5\text{-}4)$$

ここに，

ΔR_φ：最終構造系でのクリープによる反力の変化量

R_0：最終構造系を一度に施工したと仮定したときの死荷重およびプレストレスによる反力

R_1：最終構造系になる前の構造系での死荷重およびプレストレスによる反力

φ：最終構造系の完成後のクリープ係数の平均値

すなわち，施工時に構造系が多段階変化するような場合の厳密な解析は煩雑であることより，最終系になる前の不静定反力からの変化量の簡便な算定法として式(9.1-5-4)を与えている．

例題 9.1-6　計算例（道示関連：共通編，コンクリートのクリープ・乾燥収縮の影響）

前例題での図 9.1-5-1 の問題において，最終時($t=\infty$)の曲げモーメント図を**例題** 9.1-4 の式(9.1-4-11)

の材齢修正係数を用いて算定せよ．ただし，$t_0 = 28$ 日，$t_1 = 60$ 日，クリープ係数は $\varphi(\infty, t_0) = 2.0$，$\varphi(t_1, t_0) = 1.2$，弾性係数は $E_c(t_0) = 24\times10^3$ N/mm^2，$E_c(t_1) = 30\times10^3$ N/mm^2，材齢係数 $\chi = 0.8$ とする．

解答

期間 $t_0 < t < t_1$ では，等分布荷重 q_0 を受けるスパン L の単純げたであるので，端支点からの距離 x での曲げモーメントは

$$M_0 = \frac{q_0 x(L-x)}{L} \tag{9.1-6-1}$$

つぎに，等分布荷重 q_0 および支点で単位モーメントを受ける曲げ剛性 EI_c を有する単純げたの支点のたわみ角は，慣用の弾性ばり解析により，それぞれ

$$\theta_{q0} = \frac{q_0 L^3}{24EI_c}, \quad \theta_{\mathrm{M=1}} = \frac{\mathrm{L}}{3EI_c} \tag{9.1-6-2}$$

であり，中間支点の結合時（t_1）以降のクリープによるたわみ角の不連続量は

$$\Delta\theta = \frac{2q_0 L^3}{24E_c(t_1)I_c}\varphi(t,t_1) = \frac{2q_0 L^3}{24E_c(t_1)I_c}\left[\varphi(t,t_0) - \varphi(t_1,t_0)\right] \tag{9.1-6-3}$$

ここに，**例題 9.1-3** の式(9.1-3-4)より，

$$\varphi(t,t_1) = \varphi(t,t_0) - \varphi(t_1,t_0) \tag{9.1-6-4}$$

一方，単位の拘束モーメントによるたわみの不連続量は，**例題 9.1-4** の式(9.1-4-11)より

$$\Delta\bar{\theta}_{M=1} = \frac{2L}{3\bar{E}_c(t,t_1)I_c} \tag{9.1-6-5}$$

よって，たわみ角の連続条件（適合条件）より中間支点上の曲げモーメント X は

$$X = -\frac{\Delta\theta}{\bar{\theta}_{M=1}} = -\frac{\bar{E}_c(t,t_1)}{8E_c(t_1)}q_0 L^2\left[\varphi(t,t_0) - \varphi(t_1,t_0)\right] \tag{9.1-6-6}$$

$t = \infty, t_0 = 28$日, $\mathrm{t}_1 = 60$日を代入し，式(9.1-4-11)および式(9.1-6-4)より

$$\bar{E}_c(\infty,60) = \frac{1}{1+\chi\varphi(\infty,t_1)}E_c(60) = \frac{1}{1+08\times(2-1.2)}E_c(60) = 0.610\times30{,}000 = 18{,}293\mathrm{N/mm}^2 \tag{9.1-6-7}$$

さらに，式(9.1-6-6)より

$$X = -\frac{18{,}293(2.0-1.2)}{8\times30{,}000}q_0 L^2 = -0.0610 q_0 L^2 \tag{9.1-6-8}$$

最終状態での曲げモーメントは，式(9.1-6-1)と X によるモーメントの重ね合わせにより

$$M(x) = \frac{q_0 x(L-x)}{L} - \frac{X}{L}x \tag{9.1-6-9}$$

上式を図に描けば，図 9.1-6-1 のようになる．

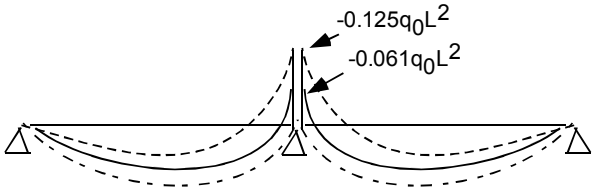

図 9.1-6-1　曲げモーメント図

本例題では，支保工をはずす直前（$t = t_0 = 28$日）に連続化した場合に比べて，$t = t_1 = 60$ 日にて連続した場合の中間支点上の曲げモーメントは約 1/2 に減少していることが分かる．

例題 9.1-7　合成げたのクリープ（道示関連：鋼橋編，コンクリート床版を有するけた構造）

道路橋示方書，鋼橋編では，合成げたのコンクリート床版のクリープによる応力変化が以下のように与えているが，この式の誘導過程を示せ．

(1)床版のコンクリート部

$$\Delta\sigma_c = \frac{1}{n_1}\left(\frac{P_\varphi}{A_{v1}} + \frac{M_\varphi y_{v1}}{I_{v1}}\right) - E_{c1}\frac{\sigma_c}{E_c}\varphi_1 \tag{9.1-7-1}$$

(2)鋼げた部

$$\Delta\sigma_c = \frac{P_\varphi}{A_{v1}} + \frac{M_\varphi y_{v1}}{I_{v1}} \tag{9.1-9.2}$$

ただし，圧縮を正とし，φ_1：クリープ係数で $\varphi_1 = 2.0$ が標準，$E_{c1} = E_c/(1+\varphi_1)$，$n_1 = n(1+\varphi_1/2)$，$n = E_s/E_c$，$E_s$：鋼げたの弾性係数，$E_c$：持続荷重載荷時のコンクリートの弾性係数であり，

$$P_\varphi = E_{c1}\cdot A_c\cdot\varepsilon_{\varphi 1} = E_{c1}A_c\frac{N_c}{E_cA_c}\varphi_1 = \frac{2\varphi_1}{2+\varphi_1}N_c$$

$$M_\varphi = P_\varphi(d_{c1}+r_c^2/d_c)\approx P_\varphi d_{c1} \qquad (9.1\text{-}7\text{-}3)$$

$$r_c^2 = I_c/A_c$$

$$N_c = \frac{M_d}{nI_v}d_cA_c$$

ここに，A_c, I_c：コンクリート床版の断面積と断面 2 次モーメント，I_v：鋼に換算した合成断面の断面 2 次モーメント，M_d：合成断面に作用する持続モーメント，d_c：合成断面の図心からコンクリート床版の図心までの距離，d_{c1}：コンクリートの弾性係数を E_{c1} としたときの d_c である（図 9.1-7-1 参照）.

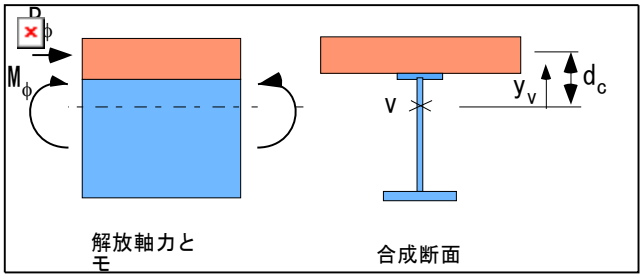

図 9.1-7-1　合成断面と解放軸力およびモーメント

解答

持続荷重の作用開始時（$t = t_0$）のコンクリート床版を σ_c し，クリープによる変化応力を $\Delta\sigma$ とひずみ増分を $\Delta\varepsilon_c$ とすれば，**例題** 9.1-4 の式(9.1-4-10)より，時刻 t での変化ひずみは以下のように与えられる.

$$\Delta\varepsilon_c = (\frac{\sigma_c}{E_c})\varphi(t,t_0) + \Delta\sigma_c/\overline{E}_c(t,t_0) \qquad (9.1\text{-}7\text{-}1)$$

ここに，$\varphi(t,t_0)$：クリープ係数，E_c：$t = t_0$ の時点でのコンクリートの弾性係数，式(9.1-4-11)より $\overline{E}_c(t,t_0) = E_c/(1+\chi\varphi(t,t_0))$ である．道路橋示方書，鋼橋編では，$t = \infty$ の最終状態のみを対象とし，$\varphi_1 = \varphi(\infty,t_0)$，$\chi = 1$，$E_{c1} = E_c/(1+\varphi_1)$ とおいて，式(9.1-7-1)をつぎのように表している..

$$\Delta\sigma_c = E_{c1}\Delta\varepsilon_c - (\frac{E_{c1}}{Ec})\sigma_c\varphi_1 \qquad (9.1\text{-}7\text{-}2)$$

クリープに伴う応力変化の解析に対しては，式(9.1-7-2)において，$\Delta\sigma_I = -(E_{c1}/E_c)\sigma_c\varphi_1$ を初期応力とみなし

$$\Delta\sigma_c = E_{c1}\Delta\varepsilon_c + \Delta\sigma_I \qquad (9.1\text{-}7\text{-}3)$$

と表す．初期応力 $\Delta\sigma_I$ はひずみ $\Delta\varepsilon_c$ を発生させないように完全拘束したときの応力とであるので，これを解放する応力（$-\Delta\sigma_I$）によって，合成断面に弾性ひずみが発生する．すなわち，クリープひずみが圧縮であれば，初期応力は引張で，解放応力は圧縮である．さて，図 9.1-7-1 に示すように，合成断面のコンクリート床版に解放応力の合力である軸力 P_φ が作用すれば，合成断面の図心からの偏心量 d_c により，解放モーメント $M_\varphi = P_\varphi(d_c + r_c^2/d_c)$，ここに r_c は床版の断面回転 2 次半径，が発生する．これらの力は期間 $t > t_0$ において徐々に発生するので，材齢（$t = \infty$）での合成断面の鋼への換算断面積を A_{v1}，換算断面 2 次モーメントを I_{v1} とすれば，コンクリート床版の応力増分は σ_I とその後の弾性ひずみに伴う応力変化の和として，

$$\Delta\sigma_c = \frac{1}{n_1}(\frac{P_\varphi}{A_{v1}} + \frac{M_\varphi y_{v1}}{I_{v1}}) - E_{c1}\frac{\sigma_c}{E_c}\varphi_1 \qquad (9.1\text{-}7\text{-}4)$$

ここに，$P_\varphi = -\Delta\sigma_I A_c = (E_{c1}A_c/E_c)\sigma_c\varphi_1$，$M_\varphi = P_\varphi(d_{c1} + r_c^2/d_c)\approx P_\varphi d_{c1}$，$n_1 = E_s/E_{c1}$，$E_s$：鋼の弾性係数，$A_c$：床版の断面積，$y_{v1}$：$t = \infty$ での合成断面の図心からの距離（上方を正とする），d_{c1}：合成断面の図心から床版断面中心までの距離である.

一方，鋼断面に作用する応力は

$$\Delta\sigma_s = \frac{P_\varphi}{A_{v1}} + \frac{M_\varphi y_{v1}}{I_{v1}} \tag{9.1-7-5}$$

ただし，圧縮を正としている．

なお，初期状態（$t = t_0$）での合成断面に作用するモーメントをM_dとし，床版の軸圧縮力をN_cとすれば，

$$N_c = \frac{M_d}{nI_v} d_c A_c \tag{9.1-7-6}$$

ここに，$n = E_c / E_s$，d_c，I_v：$t = t_0$での合成断面の図心から床版断面図心までの距離および合成断面の換算 2 次モーメントである．コンクリートのクリープひずみを$\varepsilon_{\varphi 1} = \varepsilon_c \varphi_1$，ここに$\varepsilon_e$：初期弾性ひずみ，とおけば

$$P_\varphi = E_{c1} A_c \varepsilon_{\varphi 1} = E_{c1} A_c \frac{N_c}{E_c A_c} \varphi_1 = \frac{2\varphi_1}{2+\varphi_1} N_c \tag{9.1-7-7}$$

となる．

9.2　温度変化および乾燥収縮に関する例題

例題 9.2-1　温度応力（その 1）（基本問題）

図 9.2-1-1(a)に示すような一端が固定，他端がバネで支持された棒が温度変化Δtまたは乾燥収縮ひずみε_{sh}を受けた場合に発生する応力を求めよ．ただし，棒の弾性係数と線膨張係数はそれぞれE，αで，断面積はA，バネ係数はkとする．

解答

図 9.2-1-1(a)に示す棒が温度変化Δtを受け，右端がδだけ移動したとする．バネに作用する圧縮力は$P = k\delta$であり，棒に作用する圧縮力P'は，右端がバネの無が自由端である場合のひずみ（自由温度ひずみ）$\varepsilon = EA\alpha\Delta t$と$\delta / L$との差が弾性ひずみであり，弾性条件より$P' = EA(\alpha\Delta_t - \delta / L)$である．つり合い条件である$P = P'$を考慮すれば，

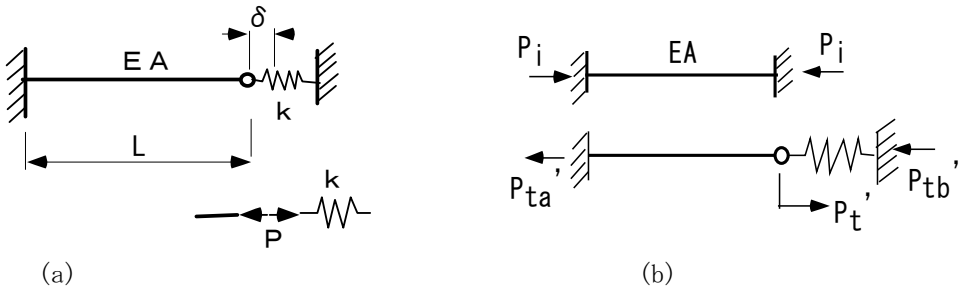

図 9.2-1-1　簡単な棒の温度応力

$$\delta = \frac{\alpha\Delta t EA}{k + EA/L}, \quad P = \frac{\alpha\Delta t k EA}{k + EA/L} \tag{9.2-1-1}$$

となる．なお，乾燥収縮ひずみの場合は，$\alpha\Delta t = -\varepsilon_{sh}$とおけばよい．

本問題はつぎのように解くこともできる．

図 9.2-1-1(b)に示すように，最初に棒の両端を固定にした完全拘束状態で温度変化を受けたとみなすと，棒には圧縮力$P_i = \alpha\Delta t EA$が働く．つぎにこの圧縮力を解放するための引張力$P_t'(= -P_t)$を節点に作用させ，棒とバネの剛性比に比例した軸力（P_{ta}', P_{tb}'）を求め，P_iと重ね合わせば，棒の圧縮力は，

$$P_i - P_{ta}' = \alpha\Delta t EA\left(1 - \frac{EA/L}{k + EA/L}\right) = \frac{\alpha\Delta t k EA}{k + EA/L} \tag{9.2-1-2}$$

上述の解放力P_t'は一般に“**温度荷重**”と呼ばれている．一般的な骨組構造の温度応力解析では，すべて

の節点を固定してP_iを求め，それを解放する温度荷重$P_t'(=-P_i)$を節点荷重として，通常の弾性解析法を用いて温度応力を求めることができる．温度荷重は実際に働く荷重ではなく，解析の便宜上見かけの初期荷重として取り扱っていることに留意する必要がある．

例題 9.2-2　温度応力（その 2）（基本問題）

図 9.2-2-1 に示す左右対称性を有するラーメン構造が全体に一様な温度変化Δtを受けた場合，各部材に生じる応力（温度応力と呼ぶ）を求めよ．ただし，線膨張係数はαとする．

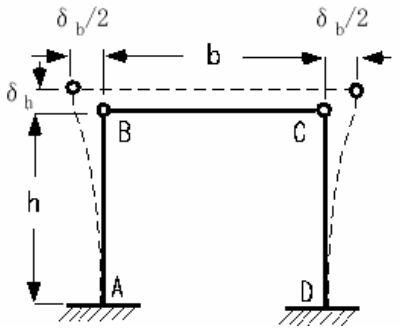

図 9.2-2-1　温度変化による変形

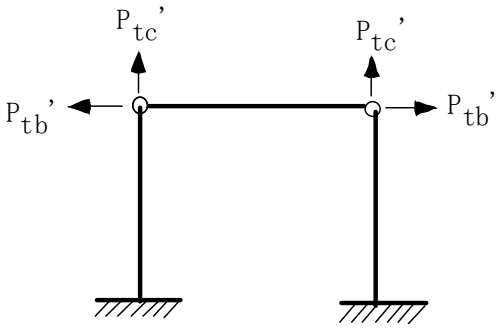

図 9.2-2-2　温度荷重

解答

図 9.2-2-2 に示すように，全節点を完全に拘束したときの部材iの応力は$\sigma_{it}=-\alpha\Delta tE_i$，$E_i$：弾性係数，であり，$\sigma_{ti}$を初期応力と見なしこれを解放する荷重（温度荷重）を各節点に作用させる．すなわち，節点 B, C での左右対称の水平温度荷重および鉛直温度荷重は

$$P_{tb}'=\alpha\Delta tE_bA_b,\quad P_{tc}'=\alpha\Delta tE_cA_c \tag{9.2-2-2}$$

ここに，E_b, E_c，A_b, A_cはそれぞれはりおよび柱の弾性係数と断面積である．左右対称性を考慮し，半スパンのはりの剛性は$k_b=2E_bA_b/b$，柱のたわみ剛性は$k_c=3E_cI_c/h^3$であるので，P_{tb}'によるはりの軸応力σ_{tb}'は

$$\sigma_{tb}'=\frac{P_{tb}'}{A_b}\cdot\frac{k_b}{k_b+k_c}=\alpha\Delta tE_b\frac{1}{1+3bE_cI_c/(2h^3E_bA_b)} \tag{9.2-2-3}$$

したがって，はりの温度軸応力は初期応力σ_tとσ_{tb}'の和として

$$\sigma_{tb}=-\alpha\Delta tE_b+\sigma_{tb}'=-\alpha\Delta tE_b\frac{1}{1+2E_bA_bh_3/(3bE_cI_c)} \tag{9.2-2-4}$$

柱は上下方向に拘束がないので，柱の温度軸力はゼロ，すなわち

$$P_{ic}=-\alpha\Delta tE_cA_c+P_{tc}'=0 \tag{9.2-2-5}$$

であるが，水平温度荷重P_{tb}'が柱に曲げモーメントM_{tc}を発生させる．すなわち，つり合い条件より柱頭のせん断力ははりの軸力に等しいから，柱の下端から距離xの断面の曲げモーメントはつぎのようになる．

$$M_{tc}=-\sigma_{tb}'A_cx=\alpha\Delta tE_bA_bx\cdot\frac{1}{1+2E_bA_bh_3/(3bE_cI_c)} \tag{9.2-2-6}$$

以上のように，骨組構造の温度応力解析は初期応力$\sigma_i=-\alpha\Delta tE$を有する問題として取り扱い，慣用の骨組解析法を用いるのが一般的である．なお，温度応力は温度変化による部材の変形を拘束することよって発生する応力であるので，静定系構造が一様な温度変化を受けた場合には，部材には温度応力は生じないと言える．

例題 9.2-3　温度応力（その 3）（基本問題）

図 9.2-3-1 に示すような，断面の上縁でΔt_u，下縁でΔt_lの温度変化を受ける連続はりに発生する応力（温度応力）を求めよ．ただし，線膨張係数はαとする．

解答

静定構造において，各部材の断面内の温度分布が直線的に変化する場合には，部材断面は平面のまま移動するので，“平面保持の仮定”に基づく骨組理論では何ら拘束応力は生じず，したがって温度応力は発生しない．

しかしながら，不静定構造では自由な変形を拘束することによる応力（温度応力）発生する．本例題は，2径間連続はりの上縁がΔt_u，下縁がΔt_lなる温度変化を受け，断面内の温度変化が線形分布とする．

中間支点を取り除いた単純はり（静定基本系）が同じ温度変化を受けたときには図9.2-3-1(b)に示すように中間支点でδのたわみが発生するので，不静定はりではこのたわみをゼロにするような下向きの拘束力Rが発生し，この拘束力による曲げモーメントが図9.2-3-1(c)のように現れる．この曲げモーメントによる断面内の応力が温度応力と呼ばれるもので，$\Delta t_l > \Delta t_u$ならば,上縁で引張応力，下縁で圧縮応力になる．

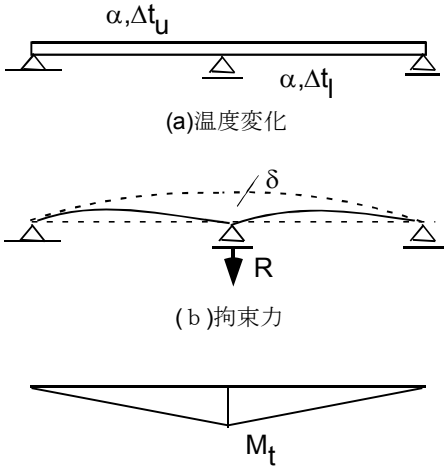

図 9.2-3-1　連続はりの温度応力

断面が長方形（$b \times h$）である場合の具体的な解析は，初期曲率ϕ_0および図心での初期ひずみε_0を有する問題として以下のように取り扱われる．

$$\phi_0 = \alpha(\Delta t_l - \Delta t_u)/h$$
$$\varepsilon_0 = \alpha(\Delta t_l + \Delta t_u)/(2h) \qquad (9.2\text{-}3\text{-}1)$$

ここに，h：はり高さ，である．軸方向には拘束がないので，温度軸力はゼロであるので，温度曲げモーメントM_tのみを求める．全曲率は初期曲率と弾性曲率の和であるので

$$\phi = \phi_0 + \frac{M_{tx}}{EI} \qquad (9.2\text{-}3\text{-}1)$$

ここに，EI：曲げ剛性，M_{tx}：不静定力Rによる曲げモーメント，であり

$$M_{tx} = \frac{Rx}{2}，ただし 0 \le x \le l \qquad (8.3\text{-}3\text{-}3)$$

ただし，xは左端の支点からの距離である．最小仕事の原理（**2章**，**例題** 2.1-2 の式(2.1-2-9)参照）を適用し，左右対称性を考慮し,全補ひずみエネルギーをW'とすると

$$\frac{\partial W'}{\partial R} = 2\int_0^l (\phi_0 + \frac{M_{tx}}{EI})\frac{\partial M_{tx}}{\partial R}dx = \int_0^l \left[\phi_0 x + \frac{Rx^2}{2EI}\right]dx = 0 \qquad (9.2\text{-}3\text{-}4)$$

ここに，l：スパン長 である．上式より

$$R = -\frac{3EI\phi_0}{l} = -\frac{3\alpha EI(\Delta t_l - \Delta t_u)}{lh}$$
$$M_{tx} = \frac{Rx}{2} = \frac{-3\alpha(\Delta t_l - \Delta t_u)EI}{2lh}\cdot x \qquad (9.2\text{-}3\text{-}4)$$

すなわち，$\Delta t_l > \Delta t_u$ ならば，温度による曲げモーメントは負となることが分かる．

例題 9.2-4　合成げたの温度応力（その 1）（道示関連： 鋼橋編，コンクリート床版を有するけた構造）

図 9.2-4-1 に示す合成げたのコンクリート床版が温度変化Δtを受けた場合に，断面内に発生する応力分布を求めよ．

解答

断面が異種材料で構成されている合成はりのような場合には，たとえ静定構造であっても断面内には温度応力が発生する．たとえば，図 7.2-4-1(a)のようなコンクリート床版が鋼 I 桁に接合されたいわゆる合成桁の断面に，図 9.2-4-1(b)のように，コンクリート床版ではΔt_c，鋼断面ではΔt_sの温度変化を受けた場合を考えよう．コンクリート床版および鋼桁のヤング係数および線膨張係数は，それぞれE_c，E_s，α_c，α_sとし，まず最初に，温度変化を受けたコンクリート床版および鋼桁が変形しないような完全拘束させるための応力（初期応力）（図 9.2-4-1(c)）を求める．このような応力は，コンクリート床版

では，$\sigma_c = -\alpha_c \Delta t_c E_c$ であり，鋼桁では，$\sigma_s = -\alpha_s \Delta t_s E_s$ である．ただし，応力は引張を正としている．

つぎにコンクリート床版と鋼桁を一体化した状態で，これらの応力を解放するための軸力 N_t および曲げモーメント M_t（温度荷重）は

$$N_t = -\int_{A_c} \sigma_c dA_c - \int_{A_s} \sigma_s dA_s = \Delta t(\alpha_c E_c A_c + \alpha_s E_s A_s)$$
$$M_t = -\int_{A_c} z\sigma_c b_c(z)dz - \int_{A_s} z\sigma_s b_s(z)dz = \Delta t(\alpha_c E_c G_c + \alpha_s E_s G_s) \qquad (9.2\text{-}4\text{-}1)$$

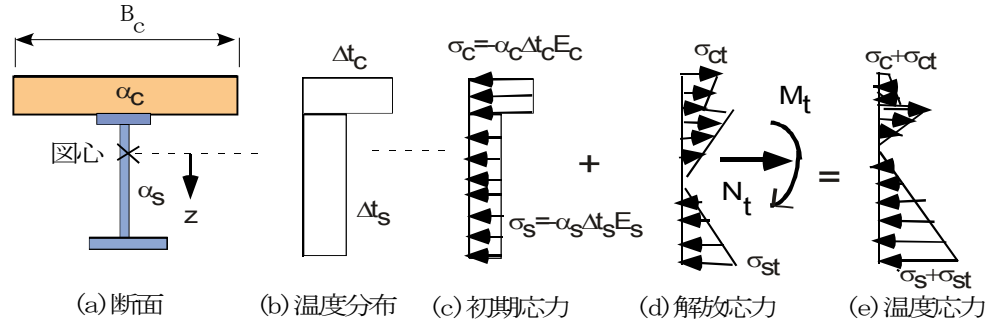

図 9.2-4-1 合成断面での温度応力算定手順

ここに，z は合成断面の図心からの距離，A_c，A_s，$b_c(z)$，$b_s(z)$ はそれぞれコンクリート床版と鋼げたの断面積および幅，G_c, G_s は合成断面の図心をとおる水平軸に関するコンクリートおよび鋼げたの断面 1 次モーメントである．式(9.2-4-1)による断面内の弾性応力（解放応力）は

$$\sigma_{ct} = \frac{N_t}{nA_v} + \frac{M_t}{nI_v} z$$
$$\sigma_{st} = \frac{N_t}{A_v} + \frac{M_t}{I_v} z \qquad (9.2\text{-}4\text{-}2)$$

ここに，z ：合成断面の図心からの距離，$n = E_s / E_c$ は鋼とコンクリートの弾性係数比で，道路橋示方書鋼橋編では $n = 7$，A_v，I_v :それぞれ合成断面における鋼に換算した断面積と断面 2 次モーメントである．

したがって，コンクリート床版および鋼げた断面の温度応力は，初期応力と解放応力の和（図 9.2-4-1(e)参照）として以下のように与えられる．

$$\sigma_c^{th} = \sigma_c + \sigma_{ct} = -\alpha_c \Delta t_c E_c + \frac{N_t}{nA_v} + \frac{M_t}{nI_v} z$$
$$\sigma_s^{th} = \sigma_s + \sigma_{st} = -\alpha_s \Delta t_s E_s + \frac{N_t}{A_v} + \frac{M_t}{I_v} z \qquad (9.2\text{-}4\text{-}3)$$

もちろん，断面内の温度応力の合力と合モーメントはともにゼロである．

以上のような断面内の温度応力解析は平面保持の仮定にしたがう骨組理論に基づくものであるから，コンクリート床版と鋼桁の接合面に働く水平せん断力の影響は無視されている．したがって，単純桁の場合であってもスパンの中央部ではよい近似を与えるが，桁端部では水平せん断力の影響が無視できなくなり，FEM などにより 2 次元平面解析を行なわねばならないことに留意する必要がある．

例題 9.2-5　合成げたの温度応力（その 2）（道示関連：鋼橋編，コンクリート床版を有するけた構造）

道路橋示方書（鋼橋編）では，合成桁におけるコンクリート床版と鋼桁の間に温度差（t）がある場合の応力として以下の式が与えられている．

(1) 床版のコンクリート部

$$\sigma_c = \frac{1}{n}\left(\frac{P_1}{A_v} + \frac{M_v y_v}{I_v}\right) - E_c \cdot \varepsilon_t \qquad (9.2\text{-}5\text{-}1)$$

(2) 鋼げた部

$$\sigma_c = \frac{P_1}{A_v} + \frac{M_v y_v}{I_v} \qquad (9.2\text{-}5\text{-}2)$$

ここに，$\varepsilon_t = \alpha t$（コンクリートが引張となる場合，すなわち鋼げたの温度がコンクリート床版の温度より高い場合を正とする），$P_1 = E_s \varepsilon_t A_c / n$，$M_v = P_1 d_c$，$\alpha$：線膨張係数，$A_c$：コンクリート床版の断面積，$A_v, I_v$：鋼断面に換算した場合の合成げたの断面積と断面 2 次モーメント，y_v：合成断面の図心からの距離（図 1.6-6-1 参照），d_c：合成断面の図心からコンクリート床版断面の図心までの距離である．

ところで，式(9.2-5-1)，(9.2-5-2)と式(9.2-4-3)の関係を調べよ．

解答

一般に線膨張係数（α）は鋼もコンクリートのほぼ同じと見なされているので，合成断面内に一様な温度を受ける場合には温度応力は発生しない．したがって，鋼げたとコンクリート床版の温度差のみが温度応力を発生させる要因になる．ところで，コンクリート床版の温度が鋼げたの温度より t だけ低くなる場合，コンクリート床版の変形を拘束したときの引張軸力（P_1）は，$P_1 = E_c \varepsilon_t A_c = E_s \varepsilon_t A_c / n$ であり，この軸力の解放による圧縮力（P_1）と偏心モーメント（$M_v = P_1 dc$）が発生する（図 9.2-4-1 参照）．よって，式(9.2-4-3)より，

コンクリート床版の応力は

$$\sigma_c = \frac{1}{n}\left(\frac{P_1}{A_v} + \frac{M_v y_v}{I_v}\right) - E_c \cdot \alpha t$$

鋼げたの応力は

$$\sigma_c = \frac{P_1}{A_v} + \frac{M_v y_v}{I_v}$$

ただし，y_v は上側を正とし，応力は圧縮を正に採っている．

例題 9.2-6　合成げたのクリープ，乾燥収縮及び温度変化による応力（道示関連：鋼橋編，コンクリート床版を有するけた構造）

前例題の合成げた断面（図 9.2-4-1）参照）のコンクリート床版がクリープ，乾燥収縮および温度降下を同時に受けたときの合成断面に発生する応力を求めよ．

解答

コンクリート床版が乾燥収縮ひずみ ε_{sh} を受ける場合は，$\Delta t = -\varepsilon_{sh} / \alpha$，$\alpha$：線膨張係数，の温度降下問題として取り扱うことができるが，クリープによる材齢の影響も受ける（**例題** 9.1-7 参照）．したがって，初期状態（$t = t_0$）にて床版に圧縮応力 σ_c が導入された後に，床版がクリープ，乾燥収縮ひずみ $\varepsilon_{sh}(t)$ および温度降下 Δt を受けた場合のひずみ増分は，式(9.1-7-1)より，

$$\Delta\varepsilon_c = \left(\frac{\sigma_c}{E_c}\right)\varphi(t,t_0) + \frac{\Delta\sigma_c}{\overline{E}_c(t,t_0)} + \varepsilon_{sh}(t) + \alpha\Delta t \tag{9.2-6-1}$$

上式より，

$$\Delta\sigma_c = \overline{E}_c(t,t_0)\Delta\varepsilon_c - \frac{\overline{E}_c(t,t_0)}{E_c}\sigma_c\varphi(t,t_0) - \overline{E}_c(t,t_0)(\varepsilon_{sh} + \alpha\Delta t) \tag{9.2-6-2}$$

したがって，コンクリート床版での初期応力（拘束応力）を

$$\Delta\sigma_I = -\frac{\overline{E}_c(t,t_0)}{E_c}\sigma_c\varphi(t,t_0) - \overline{E}_c(t,t_0)(\varepsilon_{sh} + \alpha\Delta t) \tag{9.2-6-3}$$

とし，初期応力を解放する軸力 P_φ と曲げモーメント M_φ により，材齢 t での応力変化は以下のように与えられる．

(1) コンクリート床版

$$\Delta\sigma_c = \frac{1}{n_1}\left(\frac{P_\varphi}{A_{v1}} + \frac{M_\varphi y_{v1}}{I_{v1}}\right)\varphi(t,t_0) + \Delta\sigma_I \tag{9.2-6-4}$$

(2) 鋼げた

$$\Delta\sigma_s = \frac{P_\varphi}{A_{v1}} + \frac{M_\varphi y_{v1}}{I_{v1}} \tag{9.2-6-5}$$

ただし，圧縮を正としており，$n_1 = E_s / \overline{E}_c(t,t_0)$，$P_\varphi = -\Delta\sigma_I A_c$，$M_\varphi \approx P_\varphi d_{c1}$，$A_c$：床版の断面積，

$A_{v1}, I_{v1}, d_{c1}, y_{v1}$ は材齢 t での合成断面の鋼への換算断面緒量（図 9.1-6-7 を参照）であり，鋼とコンクリートの弾性係数比 n_1 を用いた合成断面での鋼への換算断面に対して算定するものとする.

参考文献

9.1） A.Ghali.R.Favre 著（川上洵，樫福浄他訳）：コンクリート構造物の応力と変形［クリープ・乾燥収縮・ひび割れ］，技報堂出版，1995 年 1 月