Chap.8 合成げたとずれ止め

8.1　ずれ止めに作用するせん断力に関する例題

例題 8.1-1　重ねばりと一体化ばり（基本問題）

図 8.1-1-1 に示すように，スパン長（$l = 5m$）で，等分布荷重強度（$q_0 = 10\text{N/mm}$）を受ける高さ（h）が 20cm，幅（b）が 20cm の長方形断面を有する両端が単純支持された弾性ばりが２本あるとし，ケース 1：同じ断面の 2 本のはりを単純に重ね，上ばりの上面に荷重 q_0 を載せ，接触面での摩擦などの付着力が全く無い場合，ケース 2：同じ断面の上ばりと下ばりを完全に接着し，界面にずれを生じさせない場合，の双方について，最大たわみ（$\delta_{\max}$）および最大曲げ応力（$\sigma_{\max}$）を比較せよ．また，ケース 2 では，上下ばりの界面に発生するせん断付着応力（τ_{bond}）の分布がどのようになるかを初等ばり理論の範囲内で示せ．ただし，弾性係数（E）は $3\times10^4\,\text{N/mm}^2$ とする．

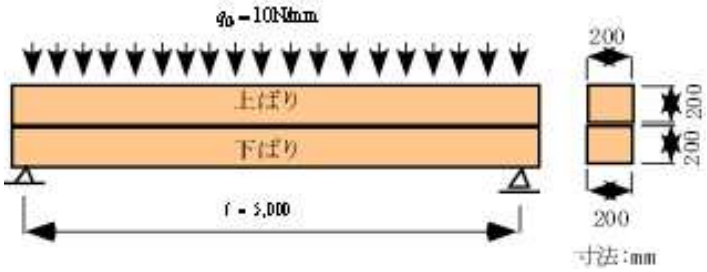

図 8.1-1-1　等分布荷重を受ける単純ばり

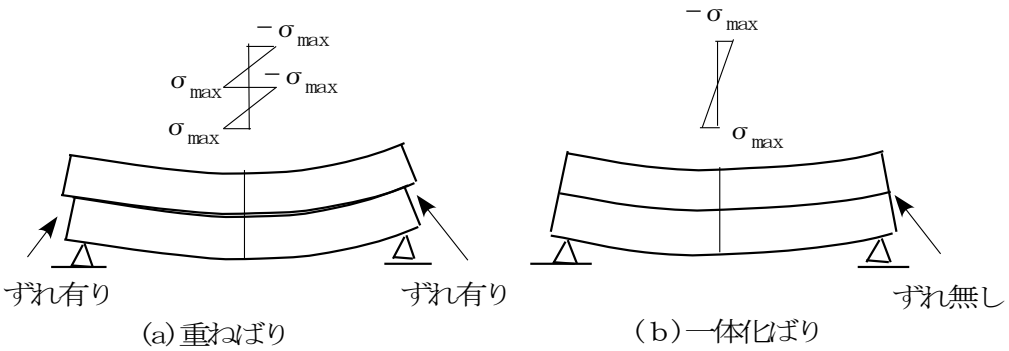

図 8.1-1-2　ずれと曲げ応力分布

解答

長方形断面（$b\times h$）の断面 2 次モーメントは，1 章の**例題 1.2-1** より

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{200\times200^3}{12} = 1.333\times10^8\,\text{mm}^4$$

ケース 1（図 8.1-1-2(a)参照）では，上ばりと下ばりは同じたわみになるので，同一断面形の上，下のはりにはそれぞれ荷重 q_0 の 1/2 が作用することになる．したがって，スパン中央の最大たわみは，前章の**例題 6.1-1** を参照して，

$$\delta_{\max} = \frac{5q_0 l^4}{2\times384EI} = \frac{5\times10\times5^4\times10^{12}}{2\times385\times3\times10^4\times1.333\times10^8} = 10.15\text{mm} \qquad (8.1\text{-}1\text{-}1)$$

最大曲げ応力は，4 章，例題 4.2-1 を参照して，

$$\sigma_{\max} = \frac{0.5M_{\max}}{I} \times \frac{h}{2} = \frac{0.5q_0 l^2}{8I} \times \frac{h}{2} = \frac{5 \times 2 \times 10^2 \times 5^2 \times 10^6}{2 \times 8 \times 1.333 \times 10^8} = \pm 11.7\text{N/mm}^2 \qquad (8.1\text{-}1\text{-}2)$$

ケース 2（図 8.1-1-2(b)参照）では，上下ばりが一体化し，断面高さが $2h$ の 1 本の断面になるので，断面 2 次モーメントが $4I$ になり，

$$\delta_{\max} = \frac{5q_0 l^4}{384 \times 8EI} = \frac{10.15}{4} = 2.54\text{mm} \qquad (8.1\text{-}1\text{-}3)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{8I} \times h = \frac{q_0 l^2}{8 \times 8I} \times h = \frac{10 \times 2 \times 10^2 \times 5^2 \times 10^6}{8 \times 8 \times 1.333 \times 10^8} = \pm 5.86\text{N/mm}^2 \qquad (8.1\text{-}1\text{-}4)$$

すなわち，上下はりを一体化させることで，最大たわみは 1/4 に，最大応力は 1/2 に低減することができる．

つぎに，ケース 2 での上下ばりの界面は高さ $2h$ の中心になるので，界面の位置での鉛直せん断力は，5 章の式(5.1-1-5)を参照して，

$$\tau_{xy} = \frac{3S_x}{2b \times 2h} \qquad (8.1\text{-}1\text{-}5)$$

ここに，S_x：せん断力であり，左支点から距離 x におけるせん断力は

$$S_x = \frac{q_0}{2}(l - 2x) \qquad (8.1\text{-}1\text{-}6)$$

したがって，せん断応力の共役関係より付着せん断応力 τ_{bond} は

$$\tau_{bond} = \tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{3q_0}{8bh}(l - 2x) = \frac{30}{32 \times 10^4}(5 \times 10^3 - 2x) \qquad (8.1\text{-}1\text{-}7)$$

最大付着せん断応力は支点部（$x = 0$）で発生し，その値は 0.468 N/mm^2 であり，スパン中心でゼロとなるように直線状に分布することが分かる．すなわち，上下 2 本のはりを一体化するには，界面の付着強度が最大で 0.468 N/mm^2 以上なければならないと言える．

ところで，上，下ばりが異種材料であるような一体化ばりまたはけたを，一般に合成ばり(composite beam)および合成げた(composite girder)と呼んでいる．

例題 8.1-2　弾性解析（道示関連：鋼橋編，合成げた橋）

図 8.1-2-1(a)に示すような，スパン長 L の単純合成げたでの，間隔 a のずれ止めに作用するせん断力 Q_a を求めよ．ただし，鋼げたの弾性係数を E_s，コンクリート床版の弾性係数を E_c とし，$n = E_s / E_c$ とする．

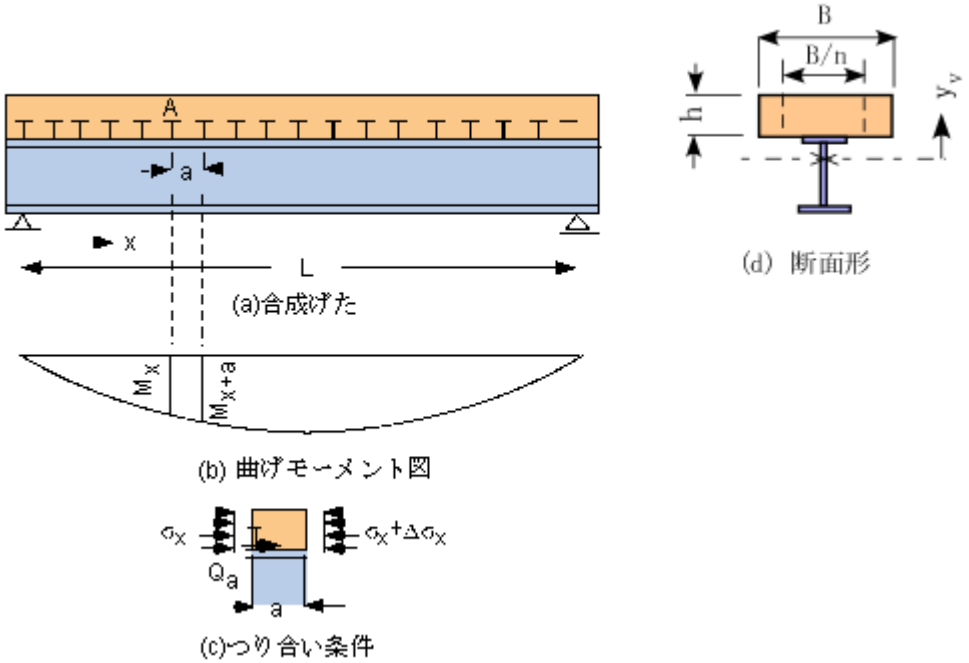

図 8.1-2-1　単純合成げたのずれ止めに働くせん断力

解答

最初に，図 8.1-2-1(d)に示すような，合成げたの断面を鋼げたの弾性係数 E_s を基準にした換算断面として，コンクリート床版の幅 B を幅 B/n に置き換えた断面を考える．つぎに，換算断面の図心と図心をとおる水平軸に関する断面２次モーメント（換算断面２次モーメントと呼ぶ）I_v を求める．

図 8.1-2-1(a)における着目点 A のずれ止めに作用するせん断力は，図 8.1-2-1(c)に示すように，つり合い条件よりずれ止め間隔 a だけ離れた 2 断面でのコンクリート床版に働く全曲げ圧縮力の差として発生する．

すなわち，

$$Q_a = \int_{\overline{A}_c} (\sigma_x + \Delta\sigma_x) d\overline{A}_c - \int_{\overline{A}_c} \sigma_x d\overline{A}_c \tag{8.1-2-1}$$

ここに，$\overline{A}_c$ はコンクリート床版の換算断面積，すなわち $\overline{A}_c = Bh/n$，h は床版厚である．

曲げ応力式（4 章，例題 4.2-1 を参照）より，

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_v} y_v, \quad \sigma_x + \Delta\sigma_x = \frac{M_{x+a}}{I_v} y_v \tag{8.1-2-2}$$

ここに，y_v は換算断面の図心からの鉛直距離であり，距離 a だけ離れた２断面での曲げモーメント差を

$$\Delta M_x = M_{x+a} - M_x \tag{8.1-2-3}$$

とおけば，

$$Q_a = \frac{\Delta M_x}{I_v} \int_{\overline{A}_c} y d\overline{A}_c = \frac{\Delta M_x}{I_v} \overline{G}_c \tag{8.1-2-4}$$

ここに，$\overline{G}_c$ ：コンクリート床版の換算断面の中立軸に関する断面 1 次モーメントであり，換算断面の図心から床版の断面中心までの距離を y_c とすれば，$\overline{G}_c = Bhy_c/n$ となる．すなわち，ずれ止めに働くせん断力は，着目断面とずれ止め間隔だけスパン中央に離れた 2 断面での曲げモーメント差 ΔM_x に比例することが分かる．

ところで，ずれ止めが密に配置されており，その間隔が a である場合は，式(5.1-2-4)は以下のように表せる．

$$Q_a = \frac{\overline{G}_c}{I_v} \cdot \frac{dM_x}{dx} \cdot a = \frac{a\overline{G}_c}{I_v} S_x \tag{8.1-2-5}$$

上式より，等間隔で密に配置されたずれ止めに作用するせん断力の分布は荷重によるせん断力図と同形であると言える．

以上は，平面保持の仮定の下に誘導された式(8.1-2-2)を用いて展開されているので，コンクリート床版と鋼げたフランジの間のずれ変形による影響が考慮されていない，いわゆる**完全合成はり理論**（後述）による結果であることに留意されたい．

例題 8.1-3　非弾性解析（道示関連：鋼橋編，ずれ止め）

ずれ止めに作用するせん断力の弾性解析や塑性解析ととはどのようなもので，それらの意義を説明せよ．

解答

スタッドのようなずれ止めは，図 8.1-3-1 に示すようにせん断力 Q_a が作用したときには，かなりのずれ変形量δが発生する．ずれ止め力の解析での弾性理論は図の直線 O-A を適用することであり，弾塑性理論は曲線 O-B を適の例用することである．

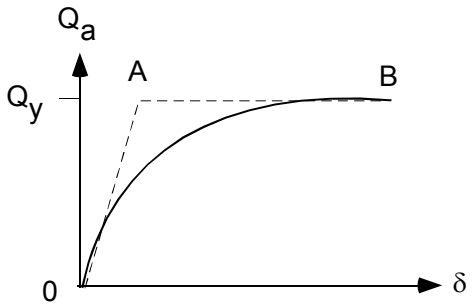

図 8.1-3-1　スタッドの荷重―ずれ曲線

ところで，前例題での式(8.1-2-4)は弾性理論により求められており，もし単純合成げたが等分布荷重を受ける場合は，図 8.1-3-2 に示すように，せん断力図が直線分布になるので，ずれ止めのせん断力が一様にするには，ずれ止め間隔でのせん断力図が描く面積が一定になるように支点近傍では密に，スパン中央部では疎にず

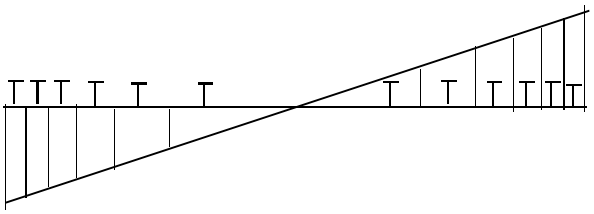

図 8.1-3-2　等分布荷重でのせん断力図

れ止めを配置することになる．

しかしながら，図 8.1-3-1 に示すような荷重－ずれ曲線では，荷重の小さい領域では弾性特性が支配するが，荷重が大きくなるにつれて塑性特性に支配され，終局荷重状態では塑性変形による再分配が起こり，ずれ止め間隔に係わらず一様なせん断力 Q_y が各ずれ止めに作用することになる．すなわち，塑性理論を適用すると，せん断力図に係わらず等間隔にずれ止めを配置すれば，終局荷重状態では，各ずれ止めには一様なせん断力が作用するといえる．

8.2 不完全合成はり理論に関する例題

例題 8.2-1　完全合成はり理論と不完全合成はり理論（基本問題）

完全合成はり理論と不完全合成はり理論とはどのようなものかを説明せよ。

解答

図 8.2-1-1 に示すように，合成断面が曲げとせん断を受けた場合，コンクリート部材と鋼部材（一般には異種部材）の界面でずれが生じないように両者が剛結されており，通常のはりの曲げ解析に適用している，いわゆる“平面保持の仮定”が合成断面にも適用できると仮定した解析理論が完全合成はり理論である。この場合はすでに例題 8.1.2 で述べたように，ずれ界面に作用する単位長さ当たりのせん断力 q は，式(8.1-2-5)より，以下のように与えられる。

$$q = \frac{\overline{G}_c}{I_v} S_x \tag{8.2-1-1}$$

ここに，$\vec{G}_c, I_v, S_x$ の記号は，式(8.1-2-4)と同じである。

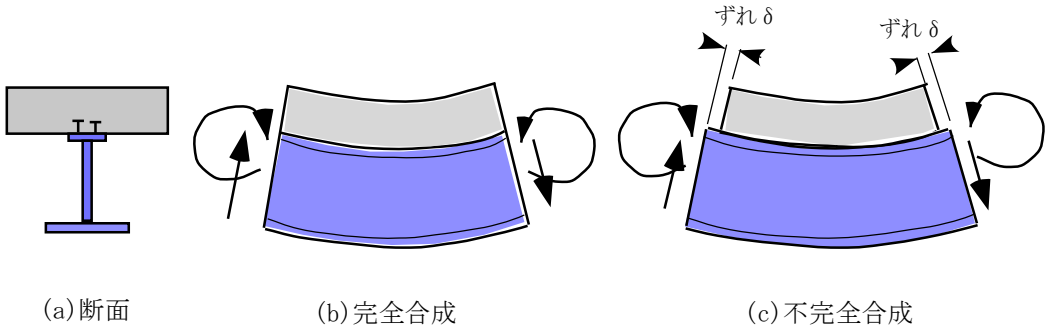

図 8.2-1-1　完全合成はりと不完全合成はり

一方，不完全合成はり理論とは，異種部材の界面でずれを許す理論であり，合成断面はいわゆる“平面保持の仮定”にしたがわない理論である。そのうち，界面での単位長さ当たりのせん断力 q とずれ量 δ がつぎのような線形弾性則（図 8.1-3-1 の直線ＯＡに対応する）

$$q = k\delta \tag{8.2-1-2}$$

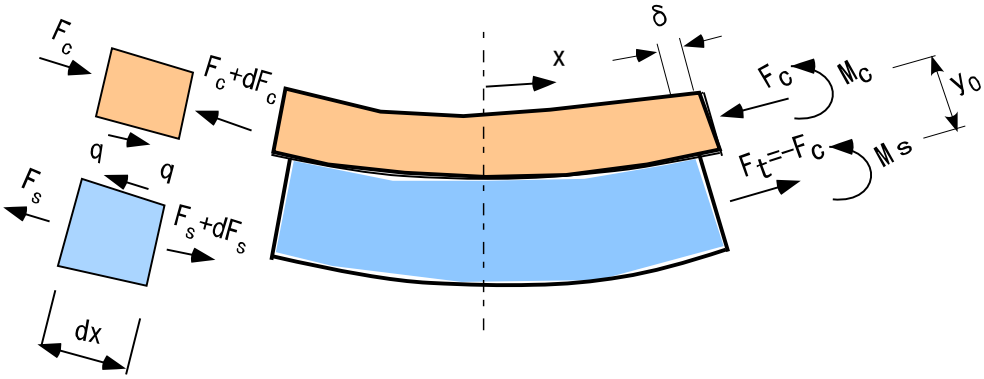

図 8.2-1-2 不完全合成はり理論

ここに，k ：バネ係数（一般にずれ剛性と呼ばれている）にしたがう問題は，M.N.Newmark(1951)によって最初に取り扱われ，一般に Newmark 理論として知られている。以下にこの理論を概説する。

図 8.2-1-2 に示すように，上部コンクリート版の図心に作用する軸圧縮力を F_c，下部の鋼げた断面の図心に作用する引張力を F_t とし，上下断面の図心間の距離を y_0 とする。いま，合成断面としては曲げモーメント M_x とせん断力 S_x を受け，軸力 N_x が作用しない問題を考えれば，任意断面でのつり合い条件より

$$M_x = M_c + M_s + F_c y_0$$
$$N_x = F_c + F_s = 0 \qquad (8.2\text{-}1\text{-}3)$$
$$F_c' - q = 0$$

ここに，M_c, M_s はそれぞれコンクリート床版および鋼げたの曲げモーメントで、F_c, F_s は圧縮を正とし、$F_c' = dF_c / dx$，（以降、ダッシュは軸方向座標 x に関する微分を意味する）

つぎに，コンクリート床版および鋼げたの軸方向変位を u_c, u_s、それぞれのたわみを v_c, v_s とし、さらにそれぞれの部材の曲げ剛性を $E_c I_c, E_s I_s$、ならびに軸剛性を $E_c A_c, E_s A_s$ とすれば、弾性条件により

$$F_c = -E_c A_c u_c', F_s = -E_s A_s u_s' \qquad (8.2\text{-}1\text{-}4)$$
$$M_c = -E_c I_c v_c'', M_s = -E_s I_s v_s''$$

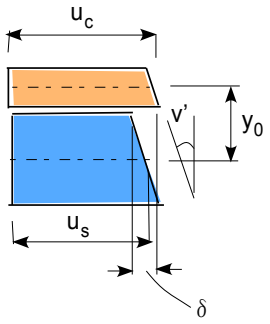

図 8.2-1-3 変位関係

コンクリート床版と鋼げたの接触面（界面）では、鉛直方向にずれはないものとすれば、両者のたわみは等しく、

$$v = v_c = v_s \qquad (8.2\text{-}1\text{-}5)$$

とおける。一方、図 8.2-1-3 に示すように界面での幾何学的関係および式(8.2-1-2)より

$$q = k\delta = k(-u_c + u_s + v' y_0) \qquad (8.2\text{-}1\text{-}6)$$

ただし、$v' = dv / dx$ は時計方向を正としている。

つぎに、式(8.2-1-3)および(8.2-1-5)より

$$F_c' = q = -k(u_c - u_s - y_0 v') \qquad (8.2\text{-}1\text{-}7)$$

さらに、式(8.2-1-4)を用いれば

$$F_c'' = -k(u_c' - u_s' - y_0 v'')$$
$$= k\left[\frac{F_c}{E_c A_c} - \frac{F_s}{E_s A_s} - \frac{y_0 (M_c + M_s)}{E_c I_c + E_s I_s}\right] \qquad (8.2\text{-}1\text{-}8)$$

式(8.2-1-3)の関係を用いて上式を整理すれば、

$$F_c'' - \beta^2 F_c = -\alpha M_x \qquad (8.2\text{-}1\text{-}9)$$

ここに、

$$\beta^2 = k\left(\frac{E_c A_c + E_s A_s}{E_s A_s E_c A_c} + \frac{y_0^2}{E\bar{I}}\right)、\ \alpha = \frac{k y_0}{E\bar{I}} \qquad (8.2\text{-}1\text{-}10)$$

式(8.2-1-9)は F_c に関する 2 階の常微分方程式である。

一例として、図 8.2-1-4 に示すような中央集中荷重 $2P$ を受けるスパン $2L$ の単純ばり合成げたの界面に作用するせん断力分布を式(8.2-1-8)により求め、式(8.2-1-1)による完全合成はり理論と比較してみよう。

左支点から距離 x の断面での、曲げモーメントは

$$M_x = Px \qquad (8.2\text{-}1\text{-}11)$$

式(8.2-1-8)の一般解は

$$F_c = A\cosh\beta x + B\sinh\beta x + \frac{\alpha P x}{\beta^2} \qquad (8.2\text{-}1\text{-}12)$$

積分定数 A, B は境界条件：$x = 0$ で、$F_c = 0$ および $x = L$ で、$F_c' = 0$（対称性の条件）より決定できる。すなわち、

$$A = 0、\ B = -\frac{\alpha P}{\beta^3}$$

よって、コンクリート床版の軸圧縮力と界面のせん断力は

$$F_c = -\frac{\alpha P}{\beta^2}\left(\frac{\sinh \beta x}{\beta \cosh \beta L} - x\right) \tag{8.2-1-12}$$

$$q = F_c' = \frac{\alpha P}{\beta^2}\left(1 - \frac{\cosh \beta x}{\cosh \beta L}\right) \tag{8.2-1-13}$$

βL の各値に対して、式(8.2-1-12)を計算した結果を図 8.2-1-5 に示す。ずれ剛性 k が大きくなると、式(8.2-1-10)より β も大きくなり、$k \to \infty$ にすれば、q は一様に分布し、式（8.2-1-1）が示す完全合成はり理論に対応していることがわかる。また、k が小さくなるにつれて、q の値が減少するとともに、その分布形状が変化していることもわかる。

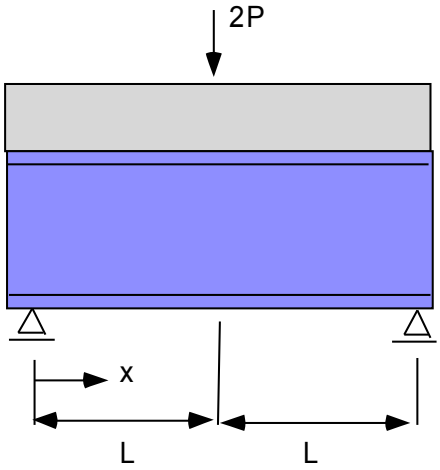

図 8.2-1-4　中央集中荷重を受ける単純はり

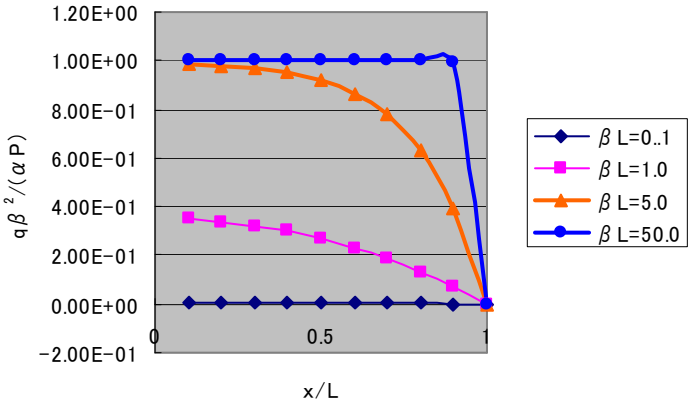

図 8.2-1-5　界面でのせん断力分布

例題 8.2-2　コンクリート床版の温度上昇または乾燥収縮によるずれ止めのせん断力分布（道示関連：鋼橋編，合成げた橋）

図 8.2-2-1 に示すような両端ローラ支持の合成桁のコンクリート床版が一様な温度上昇 Δt、または乾燥収縮ひずみ ε_{sh} を受けたときのコンクリート床版と鋼桁フランジとの間の付着せん断応力分布を求めよ．ただし，コンクリーt 床版の弾性係数，断面積，線膨張係数をそれぞれ E_c, A_c, I_s, α_c，鋼桁のそれらを E_s, A_s, I_s, α_s とし，コンクリート床版と鋼桁の図心間の距離を y_0 とし，付着せん断応力 q と水平ずれ量 δ の間には次の関係が成立するものとする．

$$q = k\delta \tag{8.2-2-1}$$

ここに k ：ずれ剛性である．

解答

完全合成はり理論は，ずれ剛性を無限大($k = \infty$)と仮定し，鋼げたフランジと床版の間にはずれが無い．この場合は，平面保持の仮定にしたがい，付着せん断応力は式(8.1-1-4)に準じ次式で与えられる．

$$q = \frac{aG_c}{I_v} S_x \tag{8.2-2-2}$$

ここに，a ：ずれ止め間隔，S_x ：曲げせん断力，I_v ：合成断面のコンクリートに換算した断面 2 次モーメント，G_c ：合成断面の図心をとおる水平軸に関するコンクリート床版の断面 1 次モーメントである．本例題では $S_x = 0$ であるから，スパン内では $q = 0$ であり，可能な付着せん断力は両支点上に集中して作用することになり，この問題に対して完全合成はり理論が適切でないといえる．すなわち，どのようなずれ止めを用いてもずれ剛性 k は有限であるから，この問題に対しては不完全合成はり理論を適用しなければならない．以下に，不完全合成はり理論に基づいてこの問題を解いてみる．

図 8.2-1-1 は対称問題であるので，スパン中央から x 座標をとり，コンクリート床版および鋼桁の軸力（圧縮を正にとる）を F_c, F_s，それぞれの曲げモーメントを M_c, M_s，単位長さ当たりの付着せん断力を q とする。

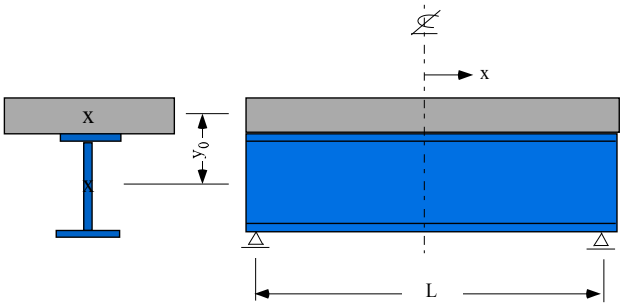

図 8.2-2-1　合成桁の付着せん断応力分布

さて，温度変化によるコンクリート床版の初期変位は

$$u_{i0} = \alpha \Delta t \cdot x \tag{8.2-2-2}$$

以下、乾燥収縮の場合は $\alpha \Delta t = -\varepsilon_{sh}$ とおけば同様に取り扱えるので割愛する。

式（(8.2-1-6)およびより，

$$q = -k(u_c - u_s - v' y_0) - k\alpha \Delta t \cdot x \tag{8.2-2-3}$$

さらに、

$$F_c' = q = -k(u_c - u_s - y_0 v') - k\alpha \Delta t \cdot x \tag{8.2-2-4}$$

よって，上式の微分と式(8.2-1-3)、8.2-1-4)および(8.2-1-8)を用い，整理すれば，

$$F_c'' - \beta^2 F_c = -k\alpha \Delta t \tag{8.2-2-5}$$

ここに，β^2 と α は式(8.2-1-10)と同じものである。

さて、式(8.2-2-5)の微分方程式の一般解は

$$F_c = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + \frac{k\alpha \Delta t}{\beta^2} \tag{8.2-2-6}$$

境界条件：$x = 0$ で $q = F_c' = 0$，および $x = L/2$ で $F_c = 0$ より，

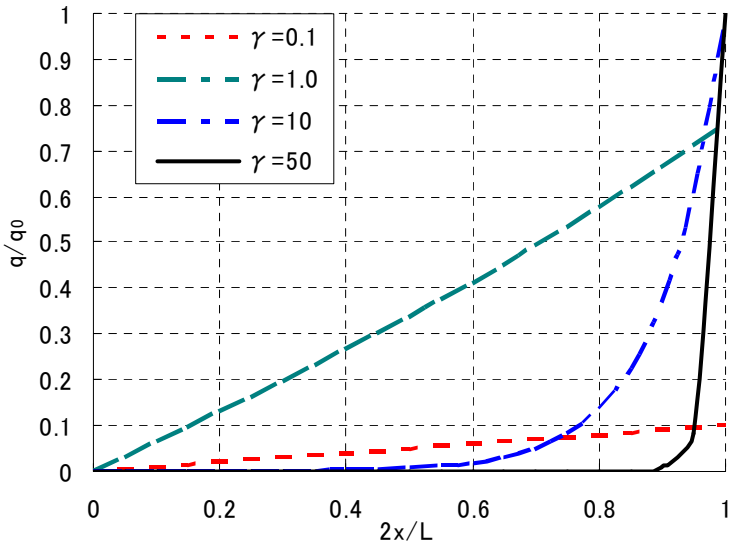

図 8.2-2-2　付着せん断応力分布

$$B = 0, \quad A = -\frac{k\alpha \Delta t}{\beta^2} \cdot \frac{1}{\cosh \beta L/2} \tag{8.2-2-7}$$

よって，

$$F_c = \frac{k\alpha\Delta t}{\beta^2}\left(1 - \frac{\cosh \beta x}{\cosh \beta L/2}\right)$$
$$q = -\frac{k\alpha\Delta t}{\beta} \cdot \frac{\sinh \beta x}{\cosh \beta L/2} \tag{8.2-2-8}$$

となる．

$$q_0 = -k\alpha\Delta t/\beta \ , \quad \gamma = \beta L/2 \tag{8.2-2-9}$$

とおいたときのγとq/q_0の関係を計算したものが図 8.2-2-2 である．ずれ剛性kをゼロに近づければ，$\gamma \to 0$よって$q \to 0$となり，$k \to \infty$にすれば$\gamma \to \infty$，よってqは$x = L/2$の支点部に集中し，その値が無限大になることがわかるであろう．したがって，合成げたでのコンクリート床版の温度変化や乾燥収縮によるずれ止め力はずれ剛性に敏感な影響を受けるといえる．

例題 8.2-3　有効なずれ止めの領域（道示関連：鋼橋編，ずれ止め）

道路橋示方書（鋼橋編）では，「合成げたのコンクリート床版の乾燥収縮および鋼げたとの温度差により生じるずれ止めのせん断力は，主げた間隔（主げた間隔が L/10，L はけたの支間長，より大きいときは L/10 をとる）の範囲に設けるずれ止めで負担するものとする」となっている（図 8.2-3-1 参照）．この理由について簡単に述べよ．

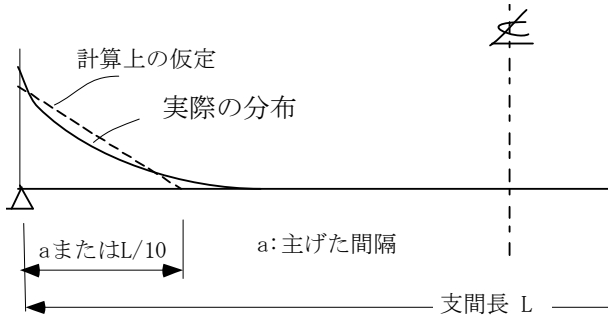

図 8.2-3-1　有効なずれ止めの領域

解答

前例題での図 8.2-2-2 で示したように，温度変化や乾燥収縮によるずれ止めのせん断力は，ずれ止めの剛性（ずれ剛性）が大きくなると支点部に集中する．実際に用いるずれ止めはブロックジベルのような比較的剛なものからスタッドのような比較的柔なものなどいろいろであり，ずれ剛性を精度よく評価することが困難であること，ならびに床版は複数の主げたで支持された板構造であり，精密な解析が困難であることなどの理由により，道路橋示方書では，経験的に床版の自由端より主げた間隔またはけた支間長の 1/10 の小さい方の部分の領域をずれ止めの有効領域とし，この領域のずれ止めのせん断力分布を図に示すように直線で近似したものである．