

Chap. 7 はり, けたのたわみ

7.1 はり, けたのたわみに関する例題

例題 7.1-1 弾性たわみ解析法 (基本問題)

図 7.1-1-1 に示す等分布荷重 q_0 を受ける単純ばりの支間中央の弾性たわみをつぎの方法により求めよ。ただし、曲げ剛性は EI とする。

- (1) 微分方程式による方法
- (2) 弾性荷重法
- (3) 仮想力法

また、これらの方法の特徴を述べよ。

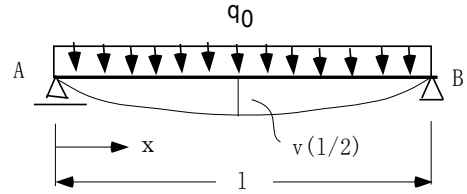


図 7.1-1-1 単純ばりのたわみ

解答

線形弾性ばりの曲げモーメント (M) と曲率 (ϕ) の関係は

$$M = EI\phi \quad (7.1-1-1)$$

ここに、 E : 弾性係数, I : 断面の図心をとる水平軸に関する断面 2 次モーメント, EI は曲げ剛性と呼んでいる。微小変位理論の適用範囲では、曲率は以下のように与えられる。

$$\phi = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (7.1-1-2)$$

ここに、 $v = v(x)$ はたわみ曲線である。

(1) 微分方程式法 (例題 1.1-2 参照)

4 階の基礎微分方程式は、

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2v}{dx^2} \right) = q_0 \quad (7.1-1-3)$$

等断面ばり ($EI = \text{const}$) の場合は

$$\frac{d^4v}{dx^4} = \frac{q_0}{EI} \quad (7.1-1-4)$$

上式の一般解は

$$\begin{aligned} v &= \iiint \int \frac{q_0}{EI} dx^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \\ &= \frac{q_0}{24EI}x^4 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4 \end{aligned} \quad (7.1-1-5)$$

ここに、 C_1, C_2, C_3, C_4 は積分定数である。境界条件は、

$$v(0) = v(l) = 0$$

$$M(0) = -EI \left[\frac{d^2v}{dx^2} \right]_{x=0} = 0, \quad M(l) = -EI \left[\frac{d^2v}{dx^2} \right]_{x=l} = 0 \quad (7.1-1-6)$$

であり、式(1.4-1-5)を上式に代入すれば、

$$C_1 = -\frac{q_0l}{12EI}, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = \frac{q_0l^3}{24EI}, \quad C_4 = 0 \quad (7.1-1-7)$$

よって、たわみ曲線と支間中央のたわみ値は

$$v = \frac{q_0x}{24EI} (x^3 - 2lx^2 + l^3) \quad (7.1-1-8)$$

$$v(l/2) = \frac{5q_0l^4}{384EI}$$

図 7.1-1-1 は静定ばりであるので、つり合い条件より、任意断面の曲げモーメントは

$$M(x) = \frac{q_0x}{2} (l-x) \quad (7.1-1-9)$$

よって、2階の微分方程式

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} = -\frac{q_0x}{2EI}(l-x) \quad (7.1-1-10)$$

の解としても式(7.1-1-8)は求められる。

(2) 弾性方程式法

荷重分布 q_0 とせん断力 $S(x)$ および曲げモーメント $M(x)$ の関係はつり合い条件により、

$$S(x) = \frac{dM(x)}{dx}, \quad \frac{dS(x)}{dx} = -q_0 \quad (7.1-1-11)$$

一方、たわみ $v(x)$ とたわみ角 $\theta = dv(x)/dx$ と $z = M(x)/EI$ の関係は適合条件と弾性条件より、

$$\theta = \frac{dv(x)}{dx}, \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -z \quad (7.1-1-12)$$

式(7.1-1-11)と式(7.1-1-12)を比較すれば、 $q_0 \rightarrow z = M(x)/EI$, $S(x) \rightarrow \theta$, $v(x) \rightarrow M(x)$ にそれぞれ対応している。したがって、境界条件も同様に対応しているならば、たわみ $v(x)$ とたわみ角 $\theta = dv/dx$ を求める問題は、荷重 z からせん断力 $S(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ を求める問題と同じになる。このような対応関係はモールの定理として知られており、 z を弾性荷重と呼んでいる。また、境界条件を対応させたはりは共役ばりと呼ばれており、元のはりと共役ばりの支持条件の対応は図 1.4-1-2 のようになる。たとえば、単純ばりの場合は共役ばりも単純ばりであり、片持ちばりは自由端と固定端が入れ替わった片持ちばりが共役ばりになる。モールの定理と共役ばりによるたわみ計算法は弾性荷重法とも呼ばれており、この方法により、図 7.1-1-1 支間中央のたわみは以下のようになる。

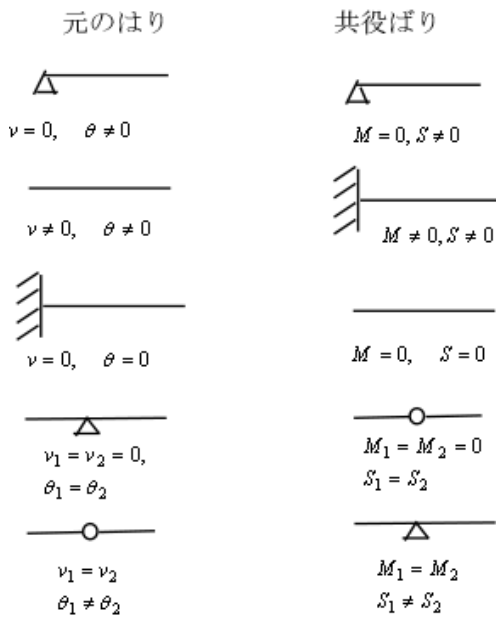


図 7.1-1-2 共役ばりでの支持条件の対応

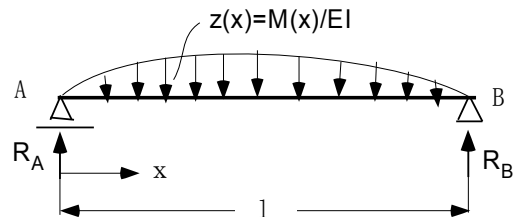


図 7.1-1-3 弾性荷重法

すなわち、図 7.1-1-3 に示すように、弾性荷重 $z(x) = M(x)/EI$ による共役ばりの曲げモーメントを $\bar{M}(x)$ 、せん断力を $\bar{S}(x)$ 、支点反力を R_A, R_B とすれば、

$$v(l/2) = \bar{M}(l/2) = R_A \frac{l}{2} - \int_0^{l/2} z(x)(l/2 - x) dx = \frac{q_0 l^4}{48EI} - \frac{q_0}{2EI} \int_0^{l/2} x(l-x)(l/2 - x) dx = \frac{5q_0 l^4}{384EI} \quad (7.1-1-13)$$

$$\text{ここに、} R_A = \frac{1}{2} \int_0^l z(x) dx = \frac{q_0}{4EI} \int_0^l x(l-x) dx = \frac{q_0 l^3}{24EI}$$

また、支点でのたわみ角は

$$\theta_A = \bar{S}(0) = R_A = \frac{q_0 l^3}{24EI} \quad (7.1-1-14)$$

(3) 仮想力法

補仮想仕事の原理によるたわみの計算法は仮想力法または単位荷重法と呼ばれている。仮想力法による $x = \xi$ の位置のたわみは以下のように求められる。

$$v(\xi) = \int_0^l \phi(x) \bar{M}(x, \xi) dx \quad (7.1-1-15)$$

ここに、 $\phi(x)$ は曲率であり、線形弾性ばりでは $\phi(x) = M(x) / EI$ であり、 $\bar{M}(x, \xi)$ は位置 $x = \xi$ での単位仮想荷重 $P=1$ による曲げモーメントである。支間中央のたわみに着目すれば、 $\xi = l/2$ であり、

$$\begin{aligned} \bar{M}(x, l/2) &= x/2 \quad (0 \leq x < l/2) \\ \bar{M}(x, l/2) &= (l-x)/2 \quad (l/2 \leq x < l) \end{aligned} \quad (7.1-1-16)$$

したがって、

$$v(l/2) = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} \frac{x^2}{4} (l-x) dx = \frac{5q_0 l^4}{384EI} \quad (7.1-1-17)$$

以上に示したように、微分方程式法はたわみ曲線形を求める場合を除けば、一般に煩雑であり、特定の位置でのたわみを求めるには、弾性荷重法または仮想力法が有利と思われる。また、仮想力法では $\phi(x)$ が実際に発生する曲率で、 $\bar{M}(x, \xi)$ は単位荷重とつり合う曲げモーメントで両者は独立であるので、 $\phi(x)$ が非弾性曲率や温度変化による曲率であっても適用でき、式(7.1-1-14)の適用性が広いことを付記する。

例題 7.1-2 たわみに対するせん断力の影響 (基本問題)

前例題で示した等分布荷重 q_0 を受ける単純ばりの最大たわみである式(7.1-1-8)は曲げモーメントのみを考慮して誘導したものであるが、せん断力がたわみに与える影響も存在する。一例として、断面が図 7.1-2-1 のような I 形断面である場合、スパン中央でせん断力によるたわみを求め、スパン長 l とせん断力の影響の関係を調べよ。ただし、せん断応力は I 形断面のウェブのみに一様に分布 (5 章, 例題 5.1-1 参照) するものとし、 $q_0 = 1 \text{ kN/mm}^2$ 、はりの弾性係数 (E) は $2.0 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比 (ν) は 0.3 とする。

解答

図 7.1-2-1 の I 形断面の断面 2 次モーメントは

$$I = \frac{1}{12} [400 \times 1000^3 - 2(190 \times 940^3)] = 7.03 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

曲げモーメントによるたわみ δ_m は、式(7.1-1-8)より

$$\begin{aligned} \delta_m &= \frac{5q_0 l^4}{385EI} = \frac{5 \times 10^3 l^4}{385 \times 2 \times 10^4 \times 7.03 \times 10^9} \quad (7.1-2-1) \\ &= 9.24 \times 10^{-14} \cdot l^4 \end{aligned}$$

つぎに、せん断力によるたわみ δ_s は、式(7.1-1-14)に準じて仮想力法を用い、

$$\delta_s = \frac{1}{GA_w} \int_0^l S_x \bar{S}_x dx \quad (7.1-2-2)$$

ここに、 A_w : ウェブの断面積で、 $A_w = 20 \times 940 = 18,800 \text{ mm}^2$ である。

G : せん断弾性係数で

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 11,500 \text{ N/mm}^2$$

S_x, \bar{S}_x : 等分布荷重 q_0 およびスパン中央の単位荷重 $\bar{P}=1$ による任意断面位置 (x) でのせん断力、それぞれ

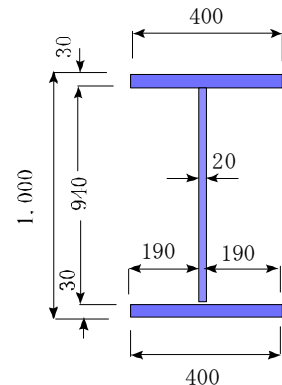


図 7.1-2-1 I 形断面 (寸法:mm)

$$S_x = \frac{q_0(l-2x)}{2}, \quad \bar{S}_x = \frac{1}{2}, \quad \text{ただし } x \leq l/2 \quad (7.1-2-3)$$

よって、式(7.1-2-2)より

$$\delta_s = \frac{10^3}{11.5 \times 18.8 \times 10^6} \int_0^{l/2} (l-2x) dx = 9.25 \times 10^{-6} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \cdot l^2 = 1.16 \times 10^{-6} \cdot l^2 \quad (7.1-2-4)$$

式(7.1-2-1)と式(7.1-2-4)を比較すれば、

$$\frac{\delta_s}{\delta_m} = \frac{1.16 \times 10^{-6} l^2}{9.24 \times 10^{-14} l^4} = 1.25 \times 10^7 l^{-2} \quad (7.1-2-5)$$

したがって、

$$l = 5\text{m} \quad (5 \times 10^3 \text{mm}) \text{ の場合は, } \delta_s / \delta_m = 0.5 \text{ (50.0\%)}$$

$$l = 10\text{m} \quad (1 \times 10^4 \text{mm}) \text{ の場合は, } \delta_s / \delta_m = 0.125 \text{ (12.5\%)}$$

$$l = 20\text{m} \quad (2 \times 10^4 \text{mm}) \text{ の場合は, } \delta_s / \delta_m = 0.03 \text{ (3.0\%)}$$

となり、スパン長 l が短くなればなるほど、せん断力のたわみに与える影響が大きくなることが分かる。

例題 7.1-3 RCばりのたわみ解析(基本問題)

図 7.1-3-1 に示す等分布荷重 q_0 を受ける長方形 RC 断面はりの短期たわみをつぎの 2 ケースについて求め。

(1) 曲げひび割れの発生荷重とその時の支間中央のたわみを求めよ。

(2) 曲げひび割れの発生後の支間中央のたわみを Branson による有効断面 2 次モーメントを用いた方法により求めよ。

ただし、コンクリートの曲げ引張強度 f_{td} は土木学会コンクリート標準示方書に基づき、

$$f_{td} = k_1 f_{tk} / \gamma_c \quad (7.1-3-1)$$

ここに、 $k_1 = 0.6 / (h^{1/3})$ ($0.4 \leq k_1 \leq 1.0$)、 h : 部材高さ (m)、 $\gamma_c = 1.0$ 、 f_{tk} : コンクリートの引張強度の特性値 ($= 0.23 f_{ck}'^{2/3}$ (N/mm²)) で、圧縮強度の特性値 $f_{ck}' = 30\text{N/mm}^2$ とする。また、鉄筋とコンクリートの弾性係数はそれぞれ $E_s = 200\text{kN/mm}^2$ 、 $E_c = 28\text{kN/mm}^2$ とする。

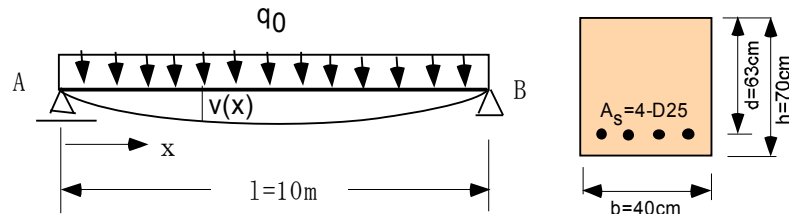


図 7.1-3-1 長方形断面単鉄筋 RC ばりの短期たわみ

解答

$A_s = 4-D25 = 20.27\text{cm}^2$ 、 $n = E_s / E_c = 7.14$ であり、ひび割れ前の全断面有効状態での図心の位置の断面底面からの距離は

$$e = \frac{2,800 \times 70 / 2 + 7.14 \times 7}{2,800 + 7.14 \times 20.27} = \frac{98,050}{2,945} = 33.3\text{cm}$$

よって、全断面有効状態での図心をとる水平軸に関する換算断面 2 次モーメントは

$$I_v = \frac{40 \times 70^3}{12} + 40 \times 70 \times (35 - 33.3)^2 + 7.14 \times 20.27 \times (33.3 - 7)^2 = 1,251,532\text{cm}^4$$

引張側の断面係数 Z は

$$Z = \frac{I_v}{e} = \frac{1,251,532}{33.3} = 37,584\text{cm}^3$$

一方、コンクリートの曲げ引張強度は

$$f_{td} = \frac{0.6}{0.888} \cdot 0.23 \times 30^{2/3} / 1.0 = 1.5 \text{N/mm}^2$$

ひび割れモーメントは

$$M_{cr} = Z \cdot f_{td} = 37,584 \times 150 = 56.38 \text{kN} \cdot \text{m}$$

単純ばりの支間中央の曲げモーメントは $M(1/2) = q_0 l^2 / 8$ であるので、ひび割れ荷重は

$$q_{0cr} = 8M_{cr} / l^2 = 8 \times 56.38 / 100 = 4.51 \text{kN/m}$$

また、このときの支間中央のたわみは、前例題での式(1.4-1-6)より、

$$v(1/2) = \frac{5q_{0cr}l^4}{384E_cI_v} = \frac{5 \times 4.51 \times 10^4}{384 \times 28 \times 10^6 \times 0.01252} = 0.00168 \text{m} = 1.68 \text{mm}$$

となる。

つぎに、ひび割れ発生後のたわみ計算に対する Branson の有効断面 2 次モーメント法にはつぎの 2 方法がある。

(1) 断面剛性が曲げモーメント $M = M(x)$ に応じて変化させる場合

$$I_e = (M_{cr} / M)^4 I_g + [1 - (M_{cr} / M)^4] I_{cr} \leq I_g \quad (7.1-3-2)$$

(2) 断面剛性を部材長にわたって一定とした換算有効断面 2 次モーメントを用いる場合

$$I_e = (M_{cr} / M_{\max})^4 I_g + [1 - (M_{cr} / M_{\max})^4] I_{cr} \leq I_g \quad (7.1-3-3)$$

ここに、 I_e : 有効断面 2 次モーメント、 I_g : 全断面有効としたときの断面 2 次モーメント、 I_{cr} : コンクリートの引張強度を無視したひび割れ断面での断面 2 次モーメント、 M_{cr} : ひび割れモーメント、 M_{\max} : 最大曲げモーメントである。

$I_g = I_v = 0.01252 \text{m}^4$ 、ひび割れ発生後の中立軸の位置の上縁からの距離(x)は

$$x/d = -np + \sqrt{(np)^2 + 2np} = -7.14 \times 0.00804 + \sqrt{(7.14 \times 0.00804)^2 + 2 \times 7.14 \times 0.00804} = 0.286$$

$$x = 0.286 \times 63 = 18.02 \text{cm}$$

ここに、 $p = A_s / (bd) = 20.27 / (40 \times 63) = 0.00804$ であり、

$$I_{cr} = \frac{bx^3}{3} + nA_s(63-x)^2 = \frac{40 \times 18.02^3}{3} + 7.14 \times 20.27 \times 44.98^2 = 370,833 \text{cm}^4 = 0.00371 \text{m}^4$$

いま、 $q_0 = 2q_{0cr} = 9.02 \text{kN/m}$ のときのたわみを式(1.4-2-2)を適用して求めると、

$M_{\max} = q_0 l^2 / 8 = 112.8 \text{kN} \cdot \text{m}$ 、 $M_{cr} / M_{\max} = 0.5$ より、

$$I_e = I_g [0.5^4 + (1 - 0.5^4) \times 0.00371 / 0.0125] = 0.341 I_g = 0.00426 \text{m}^4$$

よって、支間中央のたわみは

$$v(1/2) = \frac{5 \times q_0 l^4}{384 E_c I_e} = \frac{5 \times 9.01 \times 10^4}{384 \times 28 \times 10^6 \times 0.00426} = 9.85 \text{mm}$$

となる。

なお、方法(1)では、式(7.1-1-13)が適用できる。すなわち、

$$v(1/2) = \frac{q_0}{E_c} \int_0^l \frac{M}{I_e} dx = \frac{2q_0}{E_c} \int_0^{l/2} \frac{x^2(l-x)}{4I_e} dx \quad (7.1-3-4)$$

一般に、上式の積分は数値積分に頼らねばならない。

例題 7.1-4 非線形ばりのたわみ (基本問題)

図 7.1-4-1(a)に示すようなスパン長 l の片持ばりの自由端 B に集中荷重 P を受けたときの先端のたわみを求めよ。ただし、このはりの曲げモーメント・曲率関係は図 7.1-3-1(b)に示すような非線形特性を有するものとする。なお、このはりの初期状態での曲げ剛性は EI とする。

解答

曲げモーメント (M) と曲率 (ϕ) が非線形関係にある場合でも、式(7.1-1-13)の仮想力法が適用できる。本式を再掲すると

$$v(\xi) = \int_0^l \phi(x) \bar{M}(x, \xi) dx \quad (7.1-4-1)$$

固定端の曲げモーメント M_A が M_{cr} を越えた場合を考えると、自由端から M_{cr} の作用点までの距離 a (図 7.1-3-1(c)参照)は

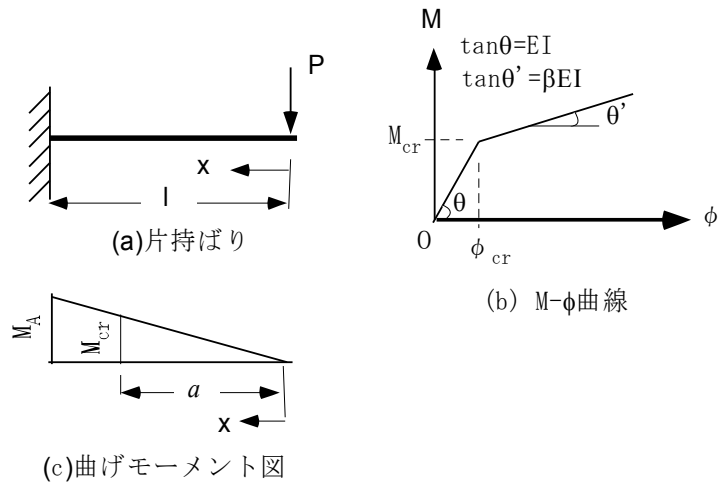


図 7.1-4-1 非線形ばりのたわみ

$\frac{a}{l} = \frac{M_{cr}}{M_A} = \frac{M_{cr}}{Pl} < 1$ 、曲率は $\phi(x) = -\frac{Px}{EI}$ ($0 \leq x \leq a$)、 $\phi(x) = -\frac{Pa}{EI} - \frac{P(x-a)}{\beta EI}$ ($a \leq x \leq l$)、仮想曲げモーメントは $\bar{M}(x,0) = -x$ である。したがって、

$$v(0) = \int_0^l \phi(x) \bar{M}(x,0) dx = \frac{P}{EI} \left\{ \int_0^a x^2 dx + \int_a^l \left[ax + \frac{x}{\beta} (x-a) \right] dx \right\} \quad (7.1-4-2)$$

$$= \frac{P}{6EI} \left[a(3l^2 - a^2) + \frac{1}{\beta} (2l^3 - 3al^2 + a^3) \right]$$

となる。

例題 7.1-5 温度変化によるたわみ(基本問題)

図 7.1-5-1(a)に示すように、部材高さ h の単純ばりが断面の上縁で t_u 、下縁で t_l の温度上昇を受け、断面内の温度分布が線形である場合、左支点から距離 a でのたわみを求めよ。ただし、部材の線膨張係数は α とする。

解答

この問題に対しても式(1.4-3-1)が適用できる。図 7.1-5-1(b)に示すように、仮想力 $\bar{P}=1$ による曲げモーメントは、

$$\bar{M}(x) = \frac{x(l-a)}{l} \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\bar{M}(x') = \frac{x'a}{l} \quad (0 \leq x' \leq l-a)$$

一方、温度上昇による曲率は

$$\phi(x) = \frac{\alpha(t_l - t_u)}{h}$$

よって、式(1.4-3-1)より

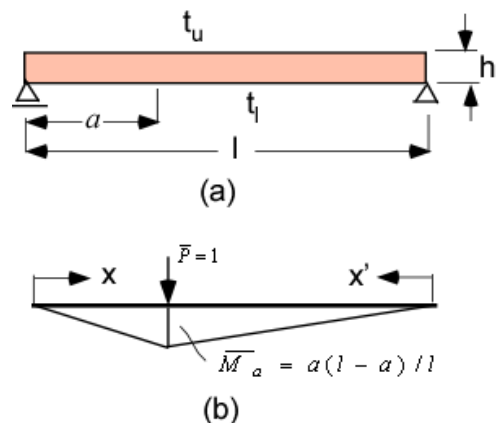


図 7.1-5-1 温度変化によるたわみ

$$v(a) = \int_0^l \phi(x) \bar{M}(x) dx = \frac{\alpha(t_l - t_u)}{hl} \left[\int_0^a x(l-a) dx + \int_0^{l-a} ax' dx' \right] = \frac{\alpha a(l-a)(t_l - t_u)}{2h} \quad (7.1-5-1)$$

となる。

例題 7.1-6 変断面ばりのたわみ (基本問題)

図 7.1-7.1(a) または (b) に示すような、はりの幅 (b) が一定で高さ (h_x) が線形に変化する長方形変断面ばりのたわみの計算法について述べよ。ただし、はりは線形弾性体で弾性係数は E とする。

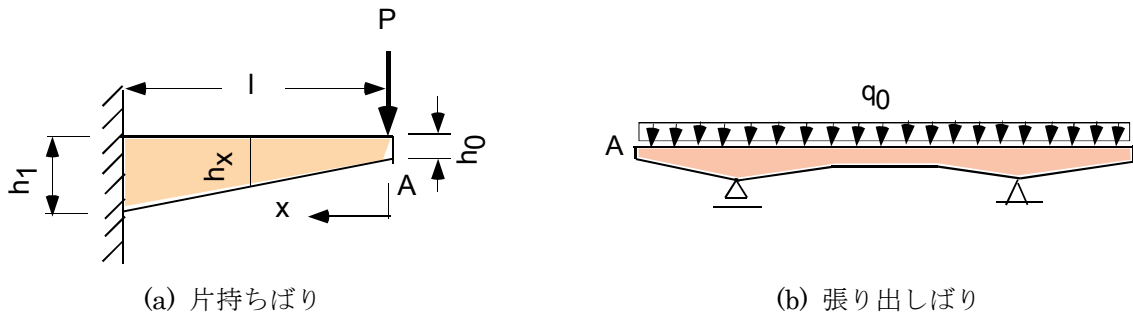


図 7.1-7.1 変断面ばりのたわみ

解答

図 7.1-7.1(a) の問題では、自由端から距離 x の位置でのはり高さ h_x は

$$h_x = \frac{l-x}{l} h_0 + \frac{x}{l} h_1$$

よって、幅 b 、高さ h_x の長方形断面の断面 2 次モーメントは

$$I(x) = \frac{b}{12l^3} [h_0(l-x) + h_1x]^3$$

図 7.1-7.2(a) に示すように、曲率は

$$\phi(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} = \frac{-12l^3 Px}{Eb[h_0(l-x) + h_1x]^3}$$

仮想力による曲げモーメントは

$$\bar{M} = -x$$

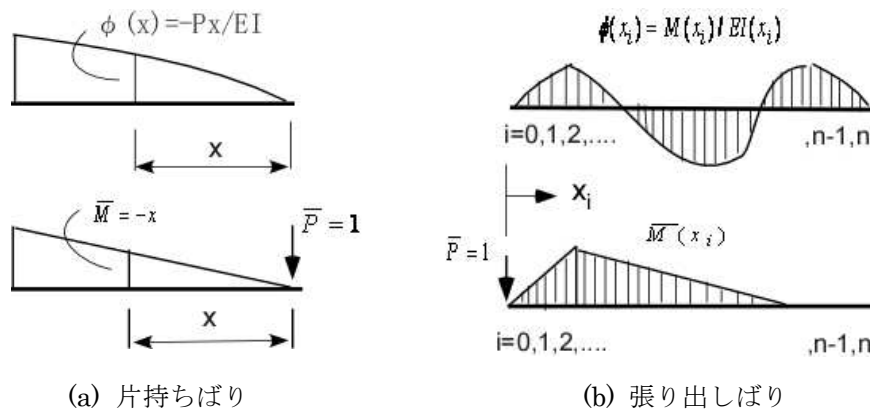


図 7.1-7.2 曲率分布と仮想力 $\bar{P} = 1$ による曲げモーメント

式(7.1-3-1)より、

$$v(0) = \int_0^l \phi(x) \bar{M} dx = \frac{12Pl^3}{Eb} \int_0^l \frac{x^2}{[h_0(l-x) + h_1x]^3} dx \quad (7.1-7.1)$$

上式の積分はつぎの積分公式を用いて実行できる。

$$\int \frac{x^2}{(x+c)^3} dx = \frac{2c}{x+c} - \frac{c^2}{2(x+c)^2} + \log|x+c| \quad (7.1-7.2)$$

すなわち、

$$v(0) = \frac{12Pl^3}{Eb(h_1-h_0)^3} \left\{ \frac{c}{l+c} \left[2 - \frac{c}{2(l+c)} \right] - \frac{3}{2} + \log \frac{l+c}{c} \right\} \quad (7.1-6-3)$$

ここに、 $c = lh_0 / (h_1 - h_0)$ である。

つぎに、図 7.1-7.1(b) に示すようなより一般的な問題では、式(7.1-7.1)の積分を解析的に実行することが難しく、数値積分に頼らねばならない場合が多い。数値積分法は種々あるが、最も簡単な台形公式を適用した場合を以下に示す。

図 7.1-7.2(b) に示すように、部材軸方向に微小間隔で n 分割し、各分割点での曲率 $\phi(x_i) = M(x_i) / EI_i$ 、およびたわみを求める位置での仮想力 $\bar{P} = 1$ による曲げモーメント $\bar{M}(x_i)$ を求めると、着目点 A のたわみは

$$v(0) = \int \phi(x) \bar{M}(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\phi(x_i) \bar{M}(x_i) + \phi(x_{i+1}) \bar{M}(x_{i+1})}{2} \right] \Delta x_i \quad (7.1-6-4)$$

ここに $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 、により計算でき、部材の支持点および曲げモーメント $M(x)$ のピーク点を分割点を選び、それらの間の区間内の分割数を十分大きく取り、すなわち間隔 Δx_i を小さくすれば、式(7.1-6-4)は数値積分による変断面ばりの実用的な計算法となる。

例題 7.1-7 連続ばりのたわみ (基本問題)

図 7.1-7-1 に示すような左径間に等分布荷重を受ける 2 径間連続ばりの任意点 C のたわみを仮想法によって求めよ。ただし、曲げ剛性は一定で EI とする。

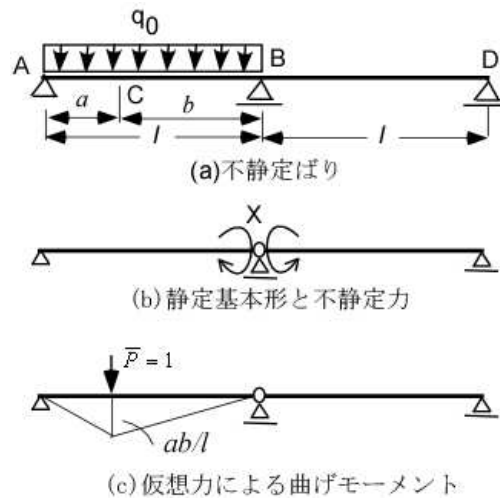


図 7.1-7-1 不静定ばりのたわみ

解答

図 7.1-7-1(a) に示すような 2 径間連続ばりの曲げモーメント図は種々の方法で求められるが、ここでは最小仕事の原理を適用する。すなわち、図 7.1-7.1(b) に示す静定基本形と中間支点の曲げモーメントを不静定力 X に選べば、

$$M(x) = \frac{q_0 x(l-x)}{2} - \frac{x}{l} X \quad (\text{A-B区間に対して、} 0 \leq x \leq l)$$

$$M(x') = -\frac{x'}{l} X, \quad (\text{D-B区間に対して、} 0 \leq x' \leq l)$$

ただし、 x は左端 A より、 x' は右端 B より取っている。最小仕事の原理より

$$\int_0^l \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial X} dx + \int_0^l \frac{M(x')}{EI} \frac{\partial M(x')}{\partial X} dx' = \frac{1}{EI} \left\{ \int_0^l \left[\frac{q_0 x(l-x)}{2} - \frac{X}{l} x \right] \left(-\frac{x}{l} \right) dx + \int_0^l \left(\frac{x'}{l} \right)^2 X dx' \right\} = 0$$

よって、

$$X = \frac{\int_0^l \frac{q_0 x^2 (l-x)}{2l} dx}{2 \int_0^l \frac{x^2}{l^2} dx} = \frac{q_0 l^2}{16} \quad (7.1-7-1)$$

仮想力 $\bar{P}=1$ による曲げモーメントは、つり合い条件を満足することのみが要求されるので、図 7.1-7-1(c) に示すような、静定基本系に対する曲げモーメントを採用することができる。すなわち、

$$\bar{M} = \frac{b}{l} x, \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$\bar{M} = a \left(1 - \frac{x}{l} \right), \quad (a \leq x \leq l)$$

A-B 区間の曲率は

$$\phi(x) = \frac{M(x)}{EI} = \frac{1}{EI} \left[\frac{q_0 x(l-x)}{2} - \frac{q_0 l x}{16} \right] = \frac{q_0 x}{EI} \left(\frac{7l}{16} - \frac{x}{2} \right)$$

よって、式(1.4-3-1)より、C点のたわみは

$$\begin{aligned} EIv(a) &= \frac{q_0 b}{16l} \int_0^a (7lx^2 - 8x^3) dx + \frac{q_0 a}{16l} \int_a^l (7lx - 8x^2)(l-x) dx \\ &= \frac{q_0}{16l} \left[\frac{ba^3}{3} (7l-6a) + \frac{7l^2 a}{2} (l^2 - a^2) - 5la(l^3 - a^3) + 2a(l^4 - a^4) \right] \end{aligned} \quad (7.1-7-2)$$

となる。

なお、仮想力 $\bar{P}=1$ による曲げモーメントを静定基本系ではなく元の不静定ばりに対して求めたものを利用して同じ結果を得るので、どちらか計算の容易な方を選べばよいことを付記しておく。

Chap. 7.2 支承の移動量に関する例題

例題 7.2-1 支承の水平変位 (道示関連：共通編、支承の移動量)

図 7.2-1-1 に示すような、スパン長 L で、左支点が固定支承、右支点が可動支承である単純げたが等分布荷重 q_0 を受けたときの可動支承の水平移動量 δ を求めよ。ただし、弾性係数は E 、けたの中央区間の断面 2 次モーメントは I_0 、支承部を含めたハンチ区間の平均断面 2 次モーメントは左支点区間では I_e 、右支点区間では I_e' とし、計算の簡略化のためにそれぞれの区間は等断面として取り扱うものとする。

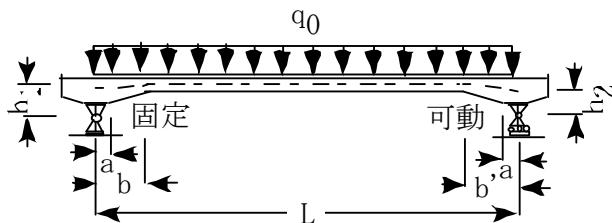


図 7.2-1-1 等分布荷重を受ける単純げた

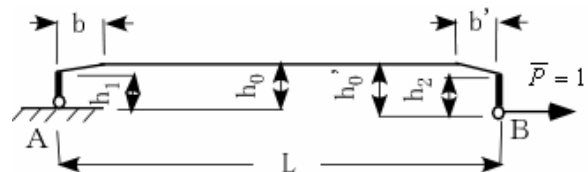


図 7.2-1-2 骨組線と仮想荷重

解答

図 7.2-1-1 の変断面げたの図心をとる骨組み線は図 7.2-1-2 のようになる。等分布荷重 q_0 を受けると支承部で回転角が生じ、図 7.2-1-3 に示すように、偏心量に応じて可動支承は水平に移動する。図

7.2-1-2において、可動支点のヒンジ部に仮想水平力 $\bar{P}=1$ をかけると、支点Aには水平力 $\bar{H}_A=-1$ 、鉛直力 $\bar{V}_A=(h_2-h_1)/L$ が作用するので、支点Aから水平距離 x の位置での仮想曲げモーメントは

$$0 \leq x \leq b \text{ では、 } \bar{M} = h_1 + \frac{x}{b} \cdot \left[h_0 + (h_2 - h_1) \frac{b}{L} - h_1 \right] \quad (7.2-1-1a)$$

$$b \leq x \leq L - b' \text{ では、 } \bar{M} = h_0 + \frac{x}{L} (h_2 - h_1) \quad (7.2-1-1b)$$

$$0 \leq x' \leq b' \text{ では、 } \bar{M} = h_2 + \frac{x'}{b'} \cdot \left[h_0' - (h_2 - h_1) \frac{b'}{L} - h_2 \right] \quad (7.2-1-1c)$$

ただし、 $x' = L - x$ 、 $h_0' = h_0 + h_2 - h_1$ である。

一方、等分布荷重 q_0 によって発生する曲げモーメントは

$$M(x) = \frac{q_0}{L} x(L-x) \quad (7.2-1-2)$$

であるので、曲率は

$$0 \leq x \leq b \text{ で、 } \phi(x) = \frac{q_0}{ELI_e} x(L-x) \quad (7.2-1-3a)$$

$$b \leq x \leq L - b' \text{ では、 } \phi(x) = \frac{q_0}{ELI_0} x(L-x) \quad (7.2-1-3b)$$

$$0 \leq x' \leq b' \text{ では、 } \phi(x) = \frac{q_0}{ELI_e'} x'(L-x') \quad (7.2-1-3c)$$

よって、仮想力の原理（単位荷重法）を適用すれば、可動支点のヒンジ部の水平移動量は

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^L \phi(x) \bar{M}(x) dx \\ &= \frac{q_0}{ELI_0} \left\{ \frac{I_0}{I_e} \int_0^b x(L-x)(h_1 + F_1 x) dx + \int_b^{L-b'} x(L-x)(h_0 + F_2 x) dx + \frac{I_0}{I_e'} \int_0^{b'} x'(L-x') [h_2 + F_3 x'] dx' \right\} \end{aligned} \quad (7.2-1-4)$$

ここに、

$$F_1 = \frac{1}{b} \cdot \left[h_0 + (h_2 - h_1) \frac{b}{L} - h_1 \right], F_2 = \frac{h_2 - h_1}{L}, F_3 = \frac{1}{b'} \cdot \left[h_0' - (h_2 - h_1) \frac{b'}{L} - h_2 \right]$$

式(7.2-1-4)における積分を実行すれば

$$\begin{aligned} \frac{12EI_0L}{q_0} \delta &= \frac{b^2 I_0}{I_e} \left[6Lh_1 + 4b(F_1 L - h_1) - 3F_1 b^2 \right] + 6L^2 h_0 (L - b - b') \\ &+ 4(F_2 L - h_0) \left[(L - b')^3 - b'^3 \right] - 3F_3 \left[(L - b')^4 - b'^4 \right] + \frac{b'^2 I_0}{I_e'} \left[6Lh_2 + 4b'(F_3 L - h_2) - 3F_3 b'^2 \right] \end{aligned} \quad (7.2-1-5)$$

となる。なお、道路橋示方書、共通編、4.1.3では、支点A, Bの回転角 θ_A, θ_B とし、

$$\delta = h_0 \times \theta_A + h_0' \times \theta_B \quad (7.2-1-6)$$

としているが、 θ_A, θ_B を仮想力の原理により求めれば、式(7.2-1-5)と式(7.2-1-6)は同じになる。

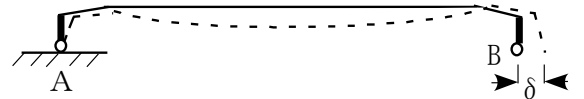


図 7.2-7-3 変形の概要