

Chap.6.2 ねじりせん断

6.2 ねじり

例題 6.2-1 単純ねじりと反り拘束ねじり（道示関連：
鋼橋編，コンクリート橋編）

一様な断面の棒のねじり問題に関連して，(1)単純ねじりモーメント（純ねじりモーメントともいう），(2)反り拘束ねじりモーメント，などの用語について簡単に説明せよ．

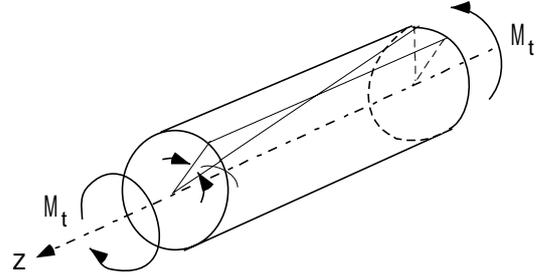


図 6.2-1-1 単純ねじり

解答

図 6.2-1-1 に示すように，棒の両端に互いに逆方向の
一対の軸回りのモーメント M_t （ねじりモーメントまたはトルクという）を与えると，棒には正負の回転角 θ （ねじり角という）が発生する．このとき，棒の両端には拘束がなく自由に回転できる場合は，棒の断面にはせん断応力のみが働き，このような状態を単純ねじり（またはサンブナン(St.Venant)ねじり）の状態という．たとえば，棒の断面が円形である場合，軸方向（z 方向）に微小距離 dz だけ離れた 2 断面での相対回転角（ねじり率と呼ばれる）は

$$\theta = \frac{d\phi}{dz} \tag{6.2-1-1}$$

であり，断面中心から距離 r にある位置でのせん断ひずみは

$$\gamma = r\theta = r \frac{d\phi}{dz} \tag{6.2-1-2}$$

で，弾性条件よりせん断応力は

$$\tau = G\gamma = Gr\theta \tag{6.2-1-3}$$

ここに， G ：せん断弾性係数である．

せん断応力は円周方向に作用するので，ねじりモーメント M_t とのつり合い条件は

$$M_t = \int_A r\tau dA = G\theta \int_A r^2 dA = G\theta I_p \tag{6.2-1-4}$$

ここに， I_p は断面極 2 次モーメントである．

任意形断面に対しては一般に次のように表される．

$$M_t = GJ\theta \tag{6.2-1-5}$$

ここに， J はねじり定数とよばれ，円形断面の場合は， $J = I_p$ である．任意形断面の単純ねじり問題の解析は 2 次元弾性解析に頼らなければならない．

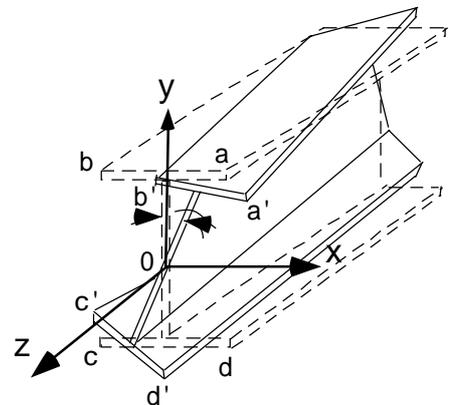


図 6.2-1-2 I 形断面はりのねじり

任意形断面の棒をねじると断面には回転軸方向にも変位が発生する．例えば，図 6.2-1-2 に示すように，I 形断面の棒をねじると上，下フランジは剛体変位を伴い，回転軸方向（z 方向）にも変位する．このような変位を反りと呼んでいる．剛体変位はねじり角 ϕ によって発生するので，上，下フランジでの反りは互いに逆方向に現れる．図では，上フランジの端部 a が z の負方向， b が正方向，下フランジの負方向， d が正方向に現れる．棒の両端が自由である場合は，反り拘束はなく，単純ねじりモーメントのみが作用し，I 形断面のねじり定数は，後述する薄膜相似法により，以下のように求められる．

$$J = \frac{1}{3} (b_u t_u^3 + b_l t_l^3 + b_w t_w^3) \tag{6.2-1-6}$$

ここに， b_u, b_l, b_w は上フランジ幅，下フランジ幅，ウェブ

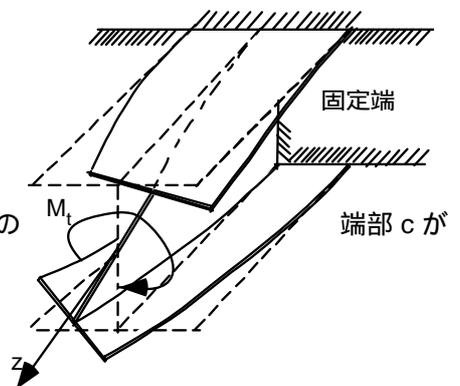


図 6.2-1-3 反り拘束ねじり

高さ， t_u, t_l, t_w はそれぞれの厚みである。

片持りの自由端にトルク M_t を与えた場合（図 6.2-1-3 参照），固定端では軸方向に変位できず，反り拘束が起こる。この場合には，上，下フランジに横方向（ y 軸回り）の曲げモーメントが発生し，それらに伴うせん断力 Q による付加的なねじりモーメント M_w ，すなわち

$$M_w = Qb_w \quad (6.2-1-7)$$

が発生し，次式を得る。

$$M_t = GJ \frac{d\phi}{dz} - \frac{b_w^2}{2} EI \frac{d^3\phi}{dz^3} \quad (6.1-1-8)$$

ここに， EI は上，下フランジの y 軸回りの断面 2 次モーメントある。式(9)において GJ は単純ねじり剛性， $b_w^2 EI / 2$ は曲げねじり剛性と呼ばれている。

反りは断面形状によって発生するもので，円断面，正方形断面では反りは発生しない，長方形断面や I 形断面や溝形断面では反りが発生するが，コンクリート部材の設計では反り拘束モーメントはあまり重要視されなく，薄肉鋼断面部材の設計において考慮されることが多い。

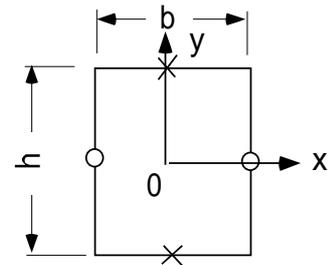


図 6.2-2-1 長方形断面

例題 6.2-2 長方形断面部材のねじり（道示関連：コンクリート橋編，部材の照査）

道路橋示方書（コンクリート橋編）4 章 部材の照査において，単純ねじりを受ける部材のせん断応力の算定式が以下のように与えられている。

$$\tau_i = \frac{M_t}{K_i} \quad (6.2-2-1)$$

ここに， τ_i ：ねじりモーメント M_t によるせん断応力度， K_i ：ねじり係数と呼ばれ，図 6.2-2-1 の長方形断面においては，

$$\text{長辺の中央に対しては，} K_i = \frac{b^2 h}{\eta_1} \quad (6.2-2-2)$$

$$\text{短辺の中央に対しては，} K_i = \frac{b^2 h}{\eta_1 \cdot \eta_2} \quad (6.2-2-3)$$

ただし， η_1, η_2 は表 1.5-4-1 で与えられる係数である。以上の式がどのようにして誘導されたのかを示せ。

表 6.2-2-1 係数

h/b	η_1	η_2
1	4.80	7.11
2	4.07	4.37
3	3.74	3.80
5	3.43	3.43
10	3.20	3.20
20	3.10	3.10
∞	3.00	3.00

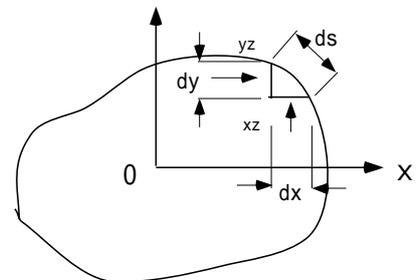


図 6.2-2-2 任意断面形

解答

任意形断面のねじり問題は 2 次元弾性問題となる。図 6.2-2-2 の断面内に直交座標 (x, y) を採り，つぎの応力関数を導入すれば，

$$\tau_{xz} = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad (6.2-2-4)$$

基礎微分方程式

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad (6.2-2-5)$$

を得る。断面の外周 C に沿った座標 s を導入すると境界条件は

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{d\phi}{ds} = 0 \quad (6.2-2-6)$$

すなわち，外周 C に沿って $\phi = \text{const.}$ となる。また，ねじりモーメント M_t と θ の関係は， C に垂直な方向

の応力成分を持たないことより

$$M_t = \iint (\tau_{xz}y - \tau_{yz}x) dx dy = \iint \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}y - \frac{\partial \phi}{\partial y}x\right) dx dy = 2 \iint \phi dx dy \quad (6.2-2-7)$$

任意断面形のねじり問題は式(6.2-2-5)を式(6.2-2-6)の下で解く問題に帰着する。この問題は水平に置かれた断面と同じ形状の穴に張力Sで薄膜を張り、全面に鉛直圧力qをかけたときの膜のたわみwに関する微分方程式を解く問題と相似になる。すなわち、

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{S} \quad (6.2-2-8)$$

$$C \text{ において } w = 0, \quad (6.2-2-9)$$

$$M_t = 2 \iint w dx dy \quad (6.2-2-10)$$

式(6.2-2-5)と式(6.2-2-8)は、 $q/S = 2G\theta$ 、 $\tau_{xz} = \partial w / \partial y$ 、 $\tau_{yz} = -\partial w / \partial x$ と置けば等価になる。このように式(6.2-2-5)を解く代わりに、式(6.2-2-8)の薄膜のたわみ問題として解析する方法を薄膜相似法という。

さて、図6.2-1-1に示す長方形断面のねじり問題は、たとえば文献：S.Timoshenko & J.N.Goodier 著、Theory of Elasticity, McGRAW-HILL(196.1)で解かれている。以下にその結果を紹介する。

図心に原点をもつ座標(x, y)を取り、式(1.4-4-8)の解を次の形で与える。

$$w = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{b} Y_n \quad (6.2-2-11)$$

ここに、 a_n : 係数、 Y_n : y のみの関数である。上式を式(6.2-2-8)に代入し、一定値 q/S を同様の余弦級数に展開すれば、つぎの常微分方程式を得る。

$$Y_n'' - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 Y_n = -\frac{q}{S} \cdot \frac{4}{n\pi a_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (6.2-2-12)$$

ここに、ダッシュはyに関する微分を表す。式(6.2-2-12)の一般解は

$$Y_n = A \sinh \frac{n\pi y}{b} + B \cosh \frac{n\pi y}{b} + \frac{4qb^2}{Sn^2\pi^3 a_n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (6.2-2-13)$$

問題の対称性より、 $A = 0$ 、また $y = h/2$ で、 $w = 0$ より、 B が決定でき、

$$Y_n = \frac{4qb^2}{Sn^2\pi^3 a_n} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/b)}{\cosh(n\pi h/2b)} \right] \quad (6.2-2-14)$$

$\phi = w$ 、 $S = -2G\theta$ の関係より、

$$\phi = \frac{8G\theta b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \frac{\cosh(n\pi y/b)}{\cosh(n\pi h/2b)} \right] \cos \frac{n\pi x}{b} \quad (6.2-2-15)$$

せん断応力は膜のたわみ角であるから、その最大値は長辺の中央において発生し、次式で与えられる。

$$\tau_{\max} = \tau_{yz} \Big|_{x=b/2} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=b/2} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{1}{\cosh(n\pi h/2b)} \right] \quad (6.2-2-16)$$

h/b の各値に対して上式の収束値を算定し、

$$\tau_{\max} = kG\theta b \quad (6.2-2-17)$$

とおけば、係数kは表6.2-2-2のようになる。

表 6.2-2-2 各係数の値

h/b	1.0	1.5	2.0	3.0	5.0	10.0	∞
k	0.675	0.848	0.930	0.985	0.999	1.000	1.000
k_1	0.141	0.196	0.229	0.263	0.291	0.312	0.333
$\eta_1 = k/k_1$	4.80	4.33	4.06	3.75	3.43	3.21	3.00

一方、ねじりモーメント M_t とねじり率 θ の関係は

$$M_t = 2 \iint \phi dx dy = \frac{32G\theta b^3 h}{\pi^4} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^4} - \frac{64G\theta b^4}{\pi^5} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^5} \tanh \frac{n\pi h}{2b} \quad (6.2-2-18)$$

上式の級数の収束計算を行い、

$$M_t = k_1 G\theta b^3 h \quad (6.2-2-19)$$

とおけば、係数 k_1 は表 6.2-2-2 のようになる。

さらに、式(26)と式(28)を結合すれば、断面の長辺の midpoint でのせん断応力に対して、式(6.2-2-17)は

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{K_i} = \frac{\eta_1}{b^2 h} M_t \quad (6.2-2-20)$$

を与え、係数 η_1 は表 6.2-2-2 のように与えられる。

なお、断面の短辺の midpoint に対しても同様に計算できるが、紙数の関係で割愛する。

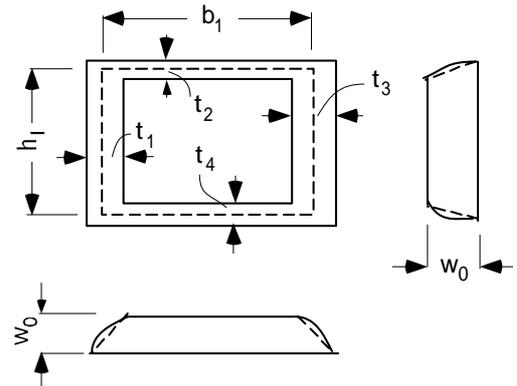


図 6.2-3-1 箱断面と薄膜相似法

例題 6.2-3 箱形断面部材のねじり (道示関連: コンクリート橋編, 部材の照査)

前例題と同様、道路橋示方書 (コンクリート橋編) では、図 6.2-3-1 に示すような箱型断面に対する単純ねじりによるせん断応力が以下のように与えられているが、これらの根拠を示せ。

$$\tau_i = \frac{M_t}{K_{ii}}, \quad i=1,2,3,4 \quad (6.2-3-1)$$

$$K_{ii} = 2A_m t_i$$

(6.2-3-2)ただし、 A_m : フランジ厚およびウェブ厚の中心線が囲む面積、すなわち $A_m = b_1 \cdot h_1$ である。

解答

図 6.2-3-1 の箱断面棒の単純ねじり解析に薄膜相似法を適用し、箱断面と同じ形状の穴に薄膜を張り、張力 S の下での内圧 q を与えたときの膜のたわみ形を推測する。

外周および内周の境界線上でのたわみはそれぞれ一定値でなければならず、それらをゼロおよび w_0 とする。フランジおよびウェブの厚みが箱断面の辺長より十分に小さければ、膜面は放物線形になり、膜たわみの傾斜角がせん断応力に対応するので、板厚全体に作用するせん断力 q_i は

$$q_i = \int_0^{t_i} \tau dt = \tau_i t_i = w_0 \quad (6.2-3-3)$$

ここに、 τ_i は平均せん断応力である。せん断応力の方向は各辺に沿った方向に作用し、 q_i はフランジおよびウェブとも同じ値となって単純ねじりモーメント M_t に抵抗するように働き、 q_i はせん断流と呼ばれている。したがって、つり合い条件により、

$$\begin{aligned} M_t &= \frac{h_1 b_1}{2} (\tau_1 t_1 + \tau_3 t_3) + \frac{b_1 h_1}{2} (\tau_2 t_2 + \tau_4 t_4) \\ &= \frac{A_m}{2} \sum_{i=1}^4 \tau_i t_i = 2A_m w_0 \end{aligned} \quad (6.2-3-4)$$

上式より、フランジおよびウェブの板厚内のせん断応力は

$$\tau_i = \frac{w_0}{t_i} = \frac{M_t}{2A_m t_i}, \quad \text{ただし、} i=1,2,3,4 \quad (6.2-3-5)$$

上式は薄膜相似法によって誘導されたものであるから、箱断面の板厚が辺長より十分小さくなければ適用できない。前述の道路橋示方書では、辺長に対する板厚の比が 0.15 以下の場合に対して式(1.5-5-5)を適用している。

なお、一般的な薄肉閉断面のねじり定数は以下のように表せる。

$$J = \frac{4A_m^2}{\oint \frac{1}{t} ds} \quad (6.2-2-6)$$

上式での積分は薄肉厚の中心線に沿う一周積分であり，図 6.2-2-1 の箱断面では

$$J = \frac{4b_1^2 h_1^2}{h_1/t_1 + b_1/t_2 + h_1/t_3 + b_1/t_4}$$

(6.2-2-7)

となる。