

Chap. 6.1 せん断応力

6.1 曲げせん断に関する例題

例題 6.1-1 けたのせん断応力（道示関連：鋼橋編，ウェブのせん断応力）

道路橋示方書（鋼橋編）では，鋼 I げたや鋼箱げたのウェブのせん断応力度の算定式として，図 6.1-1-1 に示すように，(1)初等曲げ理論による式，(2)せん断流理論による式，を与えられている．これらの式によるせん断応力分布の算定法を示せ．

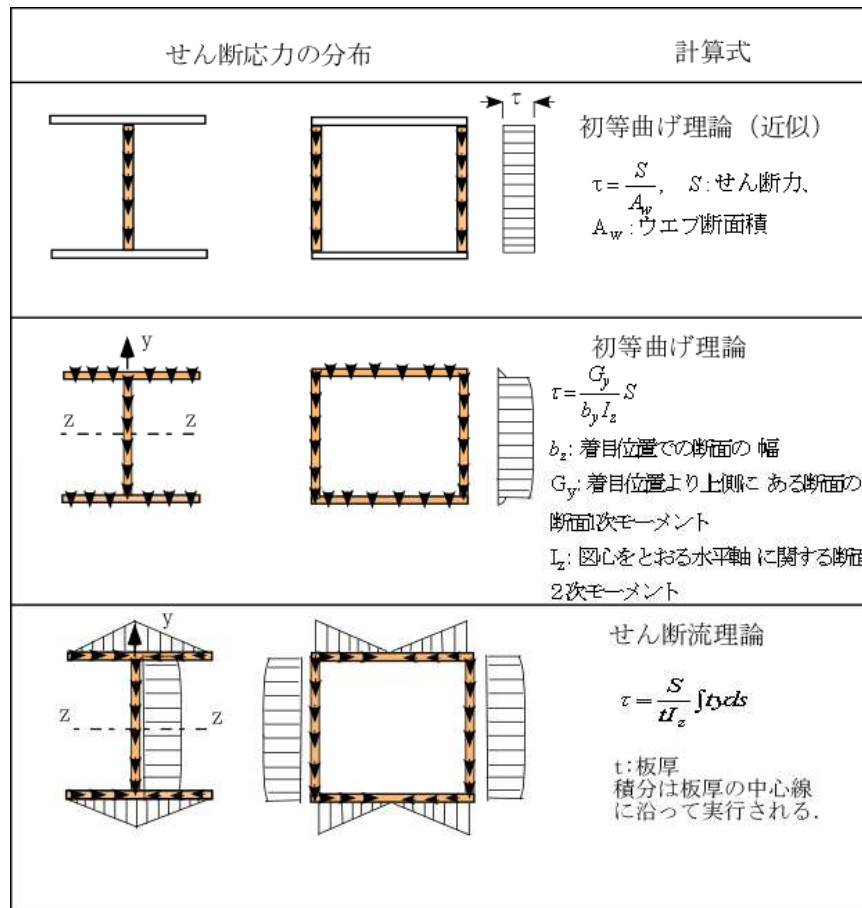


図 6.1-1-1 鋼ウェブのせん断応力度

解答

初等曲げ理論とはいわゆる“平面保持の仮定”に基づくはりの曲げ理論であり，曲げ応力度は例題 4.1-2 で示したように次式で与えられる．

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_z} y \tag{6.1-1-1}$$

この理論は断面のせん断変形を無視した理論であるので，せん断応力は式(6.1-1-1)による曲げ応力分布とつり合い条件より決定する．ところで，図 6.1-1-2(a)に示す一般的な断面形を考え，はりの軸方向に x ，断面内の水平主軸（中立軸）方向に z ，鉛直下向きに y をとる．曲げ応力 σ_x と断面内の鉛直せん断応力 τ_{xy} の関係は，図 6.1-1-3 に示すように， x の位置の断面 $a-b$ とそれより dx だけ離れた断面 $a'-b'$ でのつり合い条件より求められる．すなわち，図 6.1-1-3 の z 軸から距離 η にある水平面 $m-n$ に働くせん断力 τ_{yx} は x 断面と $x+dx$ 断面での曲げ応力の合力の差とつり合わねばならないことより，

$$\tau_{yx} b dx = \int_{A_\eta} d\sigma_x dA_\eta = \frac{dM_x}{I_z} \int_{A_\eta} y dA_\eta = \frac{G_\eta}{I_z} dM_x \quad (6.1-1-2)$$

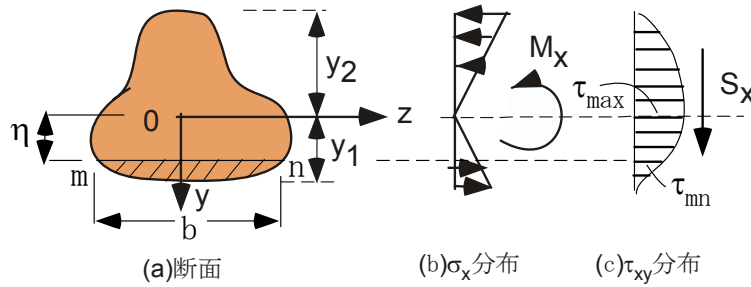


図 6.1-1-2 ソリッドな断面の曲げ応力とせん断応力分布

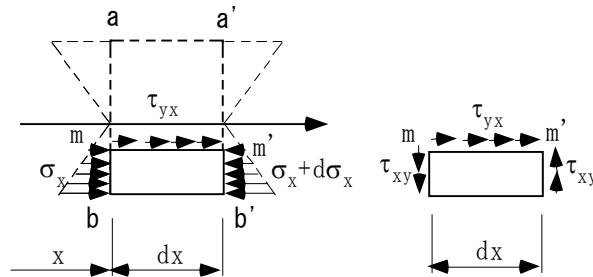


図 6.1-1-3 曲げ応力とせん断応力のつり合い関係

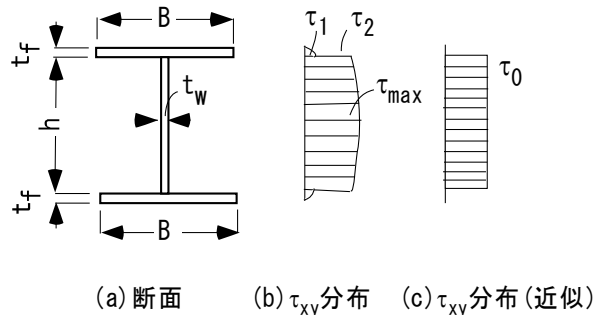


図 6.1-1-4 初等曲げ理論によるせん断応力度

ここに、 b : 着目位置での断面の幅、 A_η : 図 6.1-1-2 の断面において、 m - n より下方にある断面を意味し、 G_η : A_η の z 軸に関する断面 1 次モーメントである。せん断応力の共役関係 ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$) より、

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \frac{G_\eta}{b I_z} \frac{dM_x}{dx} = \frac{G_\eta}{b I_z} S_x \quad (6.1-1-3)$$

ここに、 $S_x = dM_x / dx$ は断面に作用するせん断力である。たとえば、幅 b 、高さ h の長方形断面に対して式 (6.1-1-3) を適用すると、せん断応力分布は G_η の分布と等しくなり、

$$G_\eta = b \int_{\eta}^{h/2} y dy = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \eta^2 \right) \quad (6.1-1-4)$$

よって、

$$\tau_{xy} = \frac{3S_x}{2bh} \left(1 - 4 \frac{\eta^2}{h^2} \right) \quad (6.1-1-5)$$

すなわち、せん断応力分は放物線分布し、その最大値は断面中央で発生し、平均せん断応力の $3/2$ 倍になる。

式 (6.1-1-3) から分かるように、鉛直せん断応力分布形は G_η / b に支配されるので、図 6.1-1-4 (a) に示

すような対称 I 形断面に適用すると、フランジ幅はウェブ幅に比べて大きいので、図 6.1-1-4(b)に示すようにウェブのせん断応力が大きくなる。この図において、

$$\tau_1 = \frac{t_f(h+t_f)}{2I_z} S_x, \quad \tau_2 = \frac{t_f B(h+t_f)}{2t_w I_z} S_x, \quad \tau_{\max} = \frac{t_f B(h+t_f) + t_w h^2 / 4}{2t_w I_z} S_x \quad (6.1-1-6, 7, 8)$$

ウェブ幅がフランジ幅に比べて非常に小さくなると、図 6.1-1-4(c)に示すよう、断面に作用するせん断力 S_x はウェブのみで受け持たせ、ウェブのせん断応力は一様分布と見なして安全側の評価になることより、道路橋示方書（鋼橋編）では、I 形断面や箱形断面のような薄肉断面ウェブのせん断応力は次式で算定してもよいとしている。

$$\tau_{xy} = \tau_0 = \frac{S_x}{A_w} \quad (6.1-1-9)$$

ここに、 $A_w (= t_w h)$: ウェブの断面積である。

ところで、式(6.1-1-6)の τ_1 はフランジの内面のせん断応力であるからウェブ上以外ではゼロにならねばならず、式(6.1-1-3)は突出フランジ部の境界条件を満足していない。実際、フランジ内のせん断応力分布は一様でなく、図 6.1-1-5 に示すように、曲げ応力とつり合うのは水平方向のせん断応力 τ_{zx} である。そこで、フランジやウェブの厚みは薄く、厚み方向のせん断応力は一様であると仮定し、ウェブ中心からフランジの突出方向に z を取れば、板厚 t_f の長方形要素 abcd でのつり合い条件より

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{1}{dx} \int_z^{B/2} d\sigma_x = \frac{dM_x}{I_z dx} \cdot \frac{h'}{2} \left(\frac{B}{2} - z \right) = \frac{h'}{4I_z} (B - 2z) S_x \quad (6.1-1-10)$$

ここに、 $h' = h + t_f$ である。上式より、フランジのせん断応力は、図 1.6.1-6 に示すように、フランジ突出端から直線的に変化し、ウェブ上で最大値 τ_1 をとることが分かる。また、ウェブとフランジの結合部のつり合い条件より、対称断面の場合は、ウェブの上下端のせん断応力度 τ_2 は

$$\tau_2 = \frac{2t_f}{t_w} \tau_1 = \frac{t_f B h'}{2t_w I_z} S_x \quad (6.1-1-11)$$

一方、ウェブの最大せん断応力度 τ_{\max} はウェブの中央で起こり、

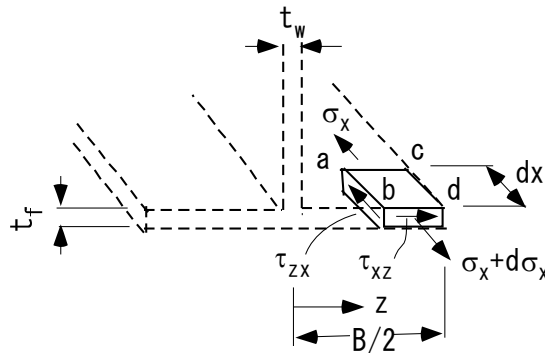


図 6.1-1-5 フランジのせん断応力

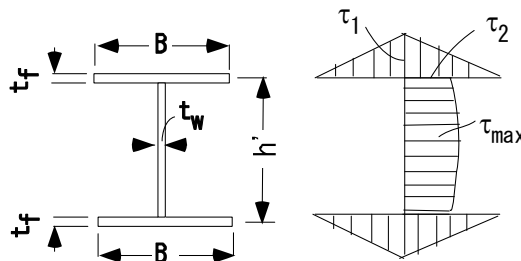


図 6.1-1-6 せん断流理論によるせん断応力分布

$$\tau_{\max} = \tau_2 + \frac{h^2}{8I_z} S_x = \frac{4t_f B h' + t_w h^2}{8t_w I_z} S_x \quad (6.1-1-12)$$

以上のように、薄肉断面でのせん断応力は、板厚方向に一様分布し、板厚の中心線に沿った方向に作用するとして展開した理論をせん断流れ理論と呼んでいる。

図 6.1-1-1 は、I 形断面および箱形断面に対して、初等曲げ理論およびせん断流れ理論を適用したときのせん断応力分布を示している。

例題 6.1-2 組み合わせ応力(道示関連：鋼橋編、部材の設計)

図 6.1-1-6 に示すような I 形断面げたに曲げモーメント M_x およびせん断応力 S_x が作用すると、ウェブとフランジの接合部には、曲げ応力 $\sigma_2 = M_x h' / (2I_z)$ と式(6.1-1-3)によるせん断応力 τ_2 を受ける。このように曲げ応力とせん断応力の組み合わせを受けるときの安全性の照査法について簡単に説明せよ。

解答

許容応力度法による安全性の照査では、曲げ応力が引張の場合と圧縮の場合では異なるが、一般的には次式によって照査する場合が多い。

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_a}\right)^m + \left(\frac{\tau_2}{\tau_a}\right)^m \leq 1 \quad (6.1-2-1)$$

ここに、 σ_a, τ_a ：それぞれ曲げ応力およびせん断応力の許容応力度、 m は任意の整数である。 σ_2 が引張である場合は、許容応力度は鋼の降伏強度 σ_y を基準にとった安全率 v (通常、 $v=1.7$) が用いられており、von Mises の降伏条件式を適用すれば、降伏に対する安全性照査式は

$$\sigma_2^2 + 3\tau_2^2 \leq \sigma_y^2 \quad (6.1-2-2)$$

許容応力度は、それぞれ $\sigma_a = \sigma_y / v, \tau_a = \sigma_y / (v\sqrt{3})$ となるので、式(6.1-2-1)は次式のように与えられる。

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_2}{\tau_a}\right)^2 \leq 1 \quad (6.1-2-3)$$

道路橋示方書(鋼橋編)では、曲げ応力とせん断応力の組み合わせ荷重を受ける場合、それぞれの応力が最大となる二つの荷重状態について、次式を満足するように規定されている。

$$\left(\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_a}\right)^2 \leq 1.2 \quad (6.1-2-4)$$

ここに、 $\sigma_{\max}, \tau_{\max}$ ：荷重の組み合わせの下で最大曲げ引張応力度と最大せん断応力度であり、式(6.1-2-3)は $\sigma_{\max}, \tau_{\max}$ がそれぞれの許容応力度の 45%以上になるときに適用されている。式(6.1-2-4)の右辺の係数が 1.0 以上になっているのは、曲げ引張応力とせん断応力の最大値を与える荷重状態が異なることによるものと思われる。また、2 方向の曲げ引張応力(σ_x, σ_y)とせん断応力を受ける場合には、von Mises の降伏条件式を適用し、以下の照査式が与えられている。

$$\left(\frac{\sigma_{x\max}}{\sigma_a}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{x\max}}{\sigma_a}\right)\left(\frac{\sigma_{y\max}}{\sigma_a}\right) + \left(\frac{\sigma_{y\max}}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{\max}}{\tau_a}\right)^2 \leq 1.2 \quad (6.1-2-5)$$

なお、曲げ応力度が圧縮の場合は座屈の影響を受けるので、式(1.6.2-1)で $m=1$ が安全サイドの照査式となり、道路橋示方書(鋼橋編)では、この形式の照査式が適用されている。