

# Chap. 5 応力とひずみ

## 5.1 応力・ひずみ曲線に関する例題

### 例題 5.1-1 材料のモデル化（基本問題）

構造解析に用いる材料モデルには、(a)線形弾性、(b)非線形弾性、(c)弾塑性、などがあるが、それらのモデルでの応力・ひずみ関係の特徴を示せ。

#### 解答

各モデルに対して、一軸応力状態での応力・ひずみ曲線を示すと、図 5.1-1-1 のように、(a)線形弾性では直線であり、(b)非線形弾性では曲線であり、両者とも負荷経路と除荷経路が同じである。すなわち、応力の増加につれてひずみが増加するが、応力を取り除くとひずみが完全に回復する性質を弾性という。一方、応力を取り除いてもひずみが残留する性質を塑性と呼び、(c)弾塑性は、弾性と塑性が混在した性質で、応力を取り除くと回復するひずみ  $\varepsilon_e$  (弾性ひずみ) と残留するひずみ  $\varepsilon_p$  (塑性ひずみ) が混じり合っている。また、(d)のように弾塑性曲線が 2 本の直線で表され、弾性域での勾配と塑性域からの除荷直線の勾配が同じであるモデルを完全塑性モデルという。

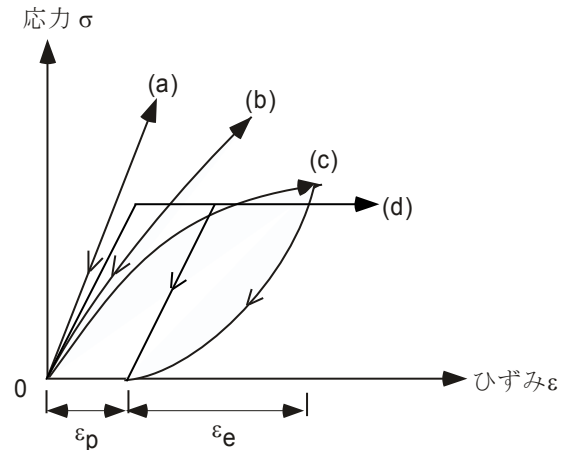


図 5.1-1-1 応力・ひずみ曲線

### 例題 5.1-2 応力-ひずみ関係（基本問題）

線形弾性モデルにおける多軸応力下での応力・ひずみ関係を、応力ベクトル  $\boldsymbol{\sigma}$  とひずみベクトル  $\boldsymbol{\varepsilon}$  の関係において示せ。

#### 解答

線形弾性モデルの応力 ( $\sigma$ ) とひずみ ( $\varepsilon$ ) 関係は 1 軸応力状態においては次式で表される。

$$\sigma = E\varepsilon \quad (5.1-2-1)$$

ここに、 $E$  は弾性係数 (ヤング率) である。

一方、多軸応力状態での応力・ひずみ関係は以下のような応力ベクトル ( $\boldsymbol{\sigma}$ ) とひずみベクトル ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) の関係で表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.1-2-2)$$

ここに、 $\mathbf{E}$  は弾性係数行列と呼んでいる。

たとえば、x-y 面に関する 2 次元問題での応力およびひずみベクトルは

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (5.1-2-3)$$

ここに、行列の右肩の T は転置を意味する。弾性係数行列は、等方・等質弾性体の平面応力問題では、

$$\mathbf{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (5.1-2-4)$$

ここに、 $E$  : 弾性係数,  $\nu$  : ポアソン比であり、一方、等方・等質弾性体の平面ひずみ問題では

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (5.1-2-5)$$

また、直交異方性弾性体の 2 次元問題では、

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x & \nu_x E_y & 0 \\ \nu_y E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.1-2-6)$$

ここに、 $E_x, E_y$  : それぞれ  $x, y$  方向の弾性係数、 $G_{xy}$  : せん断弾性係数、 $\nu_x, \nu_y$  : それぞれの方向のポアソン比で、 $\nu_x E_y = \nu_y E_x$  である。

3次元弾性問題 (図 5.1-3-3 参照) では、式(5.1-2-2)において

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T \quad (5.1-2-7)$$

等方・等質弾性体の場合では

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (5.1-2-8)$$

ここに、

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (5.1-2-9)$$

$\lambda, G$  はラーメの定数と呼ばれ、 $G$  はせん断弾性係数とも呼ばれている。

### 例題 5.1-3 応力の定義と符号 (基本問題)

直応力やせん断応力の定義と符号は、通常、どのように用いているかを示せ。

#### 解答

骨組み部材においては、部材断面に垂直に作用する応力 ( $\sigma$ ) を直応力 (normal stress) と呼び、断面に平行に作用する応力 ( $\tau$ ) をせん断応力 (shearing stress) と呼んでいる (図 5.1-3-1 参照)。鋼部材では  $\sigma$  が引張であるものを正とし、圧縮を負とするのが一般的であるが、コンクリート部材では圧縮を正とし、引張を負とする場合も多い。骨組み部材のせん断力は、断面に対して時計方向のものを正とし、反時計方向のものを負とすることが多いが、一つの面に働くせん断応力は、同時に直交する面にも働くので、図 5.1-3-1 に示すように、部材軸方向に  $dx$  だけ離れた 2 断面  $m-n, m'-n'$  に作用する時計方向のせん断力を正とすれば、直交する 2 面  $m-m', n-n'$  のせん断応力は反時計方向のものが正となり、せん断応力は直交 4 面に作用する  $\tau$  で定義される。

2次元微小要素 (図 5.1-3-2) や 3次元微小要素 (図 5.1-3-3) での応力の定義と符号については、座標系に準じたものを採るのが普通である。すなわち、2次元座標系 ( $0-x-y$ ) では、 $x$  軸の正の面に働く  $x$  軸方向に向かうものを正の直応力  $\sigma_x$  で、 $y$  軸方向に向かうものが正のせん断応力  $\tau_{xy}$  であり、 $y$  軸の正の面に働く  $y$  軸方向に向かうものを正の直応力  $\sigma_y$  で、 $x$  軸方向に向かうものが正のせん断応力  $\tau_{yx}$  であり、共役関係より、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  である。一方、3次元座標系 ( $0-x-y-z$ ) では、各座標軸の正の面に働く直応力  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  はそれぞれの座標軸方向に向かうものを正とし、面に接する方向のせん断応力  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  は

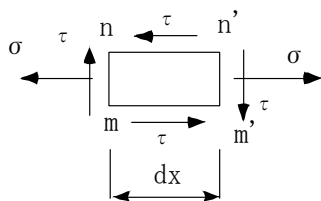


図 5.1-3-1 骨組み部材要素と応力

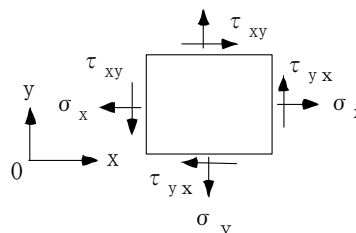


図 5.1-3-2 2次元微小要素と応力

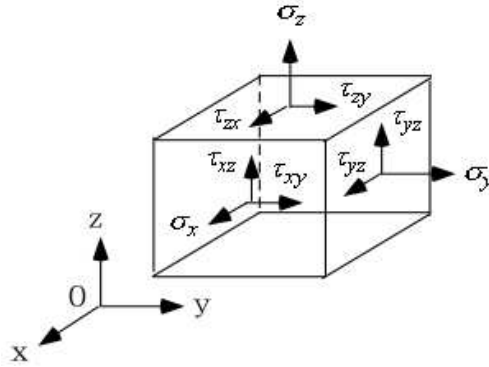


図 5.1-3-1 3次元微小要素と応力（座標軸の正面のみ表示）

最初の添字が作用面を，第2の添字が作用方向を意味しており，座標軸の正の面に働くせん断応力は座標軸の正方向を向かうものを正としている．なお共役関係より， $\tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{zy} = \tau_{yz}$  である．

なお，応力をテンソルとして表示する場合は，

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (5.1-3-1)$$

右辺の対角項は直応力を，非対角項はせん断応力を表し，せん断応力の共役関係より，対称配列になっている．

#### 例題 5.1-4 鋼の応力-ひずみ曲線（道示関連：鋼橋編，使用材料）

道路橋示方書，鋼橋編では，鋼材の板厚が 40mm 以下の場合，SS400，SM400 材等の許容軸方向引張応力度 ( $\sigma_{ta}$ ) は  $140 \text{ N/mm}^2$ ，SM490 材では  $\sigma_{ta} = 185 \text{ N/mm}^2$  とされている．これらの鋼材の一軸引張状態での応力・ひずみ曲線と，降伏点および終局強度（ピーク強度）と  $\sigma_{ta}$  との関係を示せ．

#### 解答

図 5.1.5.1(a) に示すように，SS400 材の応力・ひずみ曲線は明確な降伏点  $\sigma_y$  を示し， $\sigma_y$  まではほぼ線形弾性モデルの挙動を示す．降伏後は  $\sigma_y$  を持続しながらひずみが増大する降伏棚を示し，ひずみが 1.5～1.8% を超えると再び応力が増加するひずみ硬化領域 (strain hardening) に入る．ピーク強度（終局強度） $\sigma_u$  を超えると，ひずみの増加につれて応力が減少するひずみ軟化領域 (strain softening region) に入り，その後，破断するといわれている．JIS 規格では，SS400 材，SM400 材の降伏点 ( $\sigma_y$ ) は  $235 \text{ N/mm}^2$  以上，終

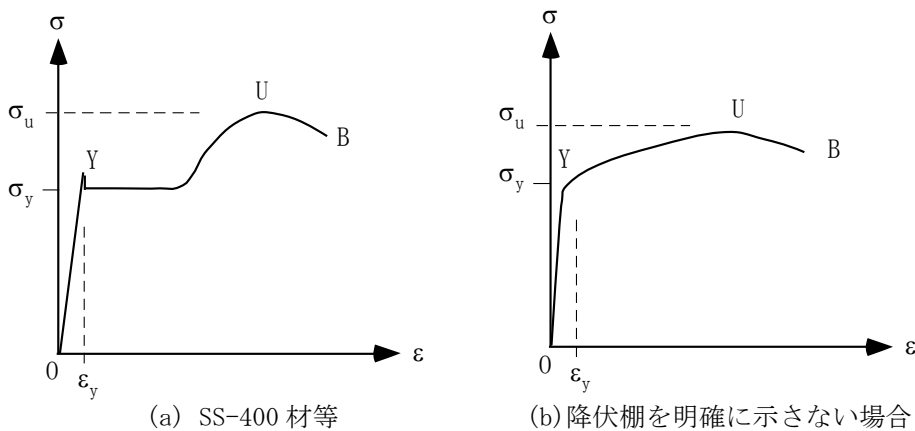


図 5.1-5.1 鋼材の一軸引張状態での応力・ひずみ曲線

局強度 ( $\sigma_u$ ) は  $400 \sim 510 \text{ N/mm}^2$  となっているので、降伏強度の許容応力度に対する比 ( $\sigma_y / \sigma_{ta}$ ) は  $235/140 = 1.68$  となり、終局強度の許容応力度に対する比 ( $\sigma_u / \sigma_{ta}$ ) は  $2.9 \sim 3.6$  となっている。同様に、SM490 材の JIS 規格では、 $\sigma_y$  は  $315 \text{ N/mm}^2$  以上、 $\sigma_u$  は  $490 \sim 610 \text{ N/mm}^2$  であるので、 $\sigma_y / \sigma_{ta} = 1.7$ 、 $\sigma_u / \sigma_{ta} = 2.6 \sim 3.3$  となる。なお、焼入れ焼き戻しをした調質鋼の応力・ひずみ曲線では、SS400 材のように降伏棚を示さず、非線形性が徐々に現れるので、図 5.1.5.1(b) のように、除荷時の残留ひずみ  $\epsilon_p$  が一定の値 (たとえば、JIS では 0.2%) のときの応力値を降伏点と見なし、モデル化することが多い。

**例題 5.1-5 設計に用いる鋼材の応力-ひずみ曲線 (道示関連：コンクリート橋編，耐震設計編)**

典型的な鋼材の応力-ひずみ曲線を例題 5.1-4 に示したが、設計に用いる応力-ひずみ曲線はどのようにモデル化されているかを示せ。

**解答**

設計のための構造解析では、目的に応じて材料のモデル化を行なっている。道路橋示方書，コンクリート橋編および耐震設計編では、鉄筋の応力 ( $\sigma_s$ ) - ひずみ ( $\epsilon_s$ ) 曲線を図 5.1-5-1a), b) のように与えている。図において、 $\sigma_{sy}$  : 鉄筋の降伏点、 $E_s$  : 弾性係数 (ヤング率) である。図 5.1-3-1 と比べると、設計基準強度 ( $\sigma_{sk}$ ) を鋼材の降伏点 ( $\sigma_{sy}$ ) に採り、ひずみ硬化を無視し、ひずみ限界値は設けていない。一方、PC 鋼線のような高張力鋼に対しては、図 5.1-5-2 に示すように降伏後のひずみ硬化域を考慮した応力-ひずみ曲線を用いており、見かけの降伏点は PC 鋼線の引張強さ ( $\sigma_{pu}$ ) の  $0.84$  倍に、極限強さは  $0.93$  倍に採っている。また、鋼製橋脚の耐震設計では、鋼材の応力-ひずみ曲線は引張および圧縮領域ともそれぞれバイリニア曲線で与えており、引張領域でのひずみ硬化係数は初期弾性係数 (ヤング率) の  $1/100$  としており、圧縮領域では局部座屈の影響を考慮して限界ひずみ  $\epsilon_u$  を設けている。

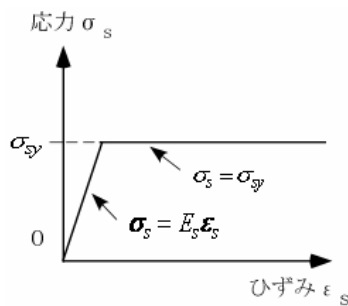


図 5.1-5-1a) 鉄筋の応力-ひずみ曲線 (道示, コンクリート橋編)

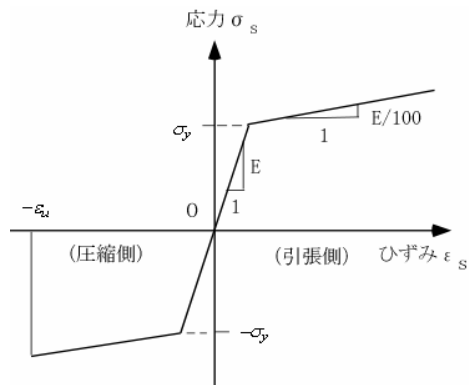


図 5.1-5-1b) 鉄筋の応力-ひずみ曲線 (道示, 耐震設計編)

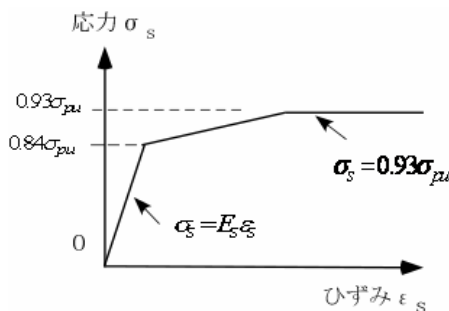


図 5.1-5-2 PC 鋼線の応力-ひずみ曲線 (道示, コンクリート橋編)

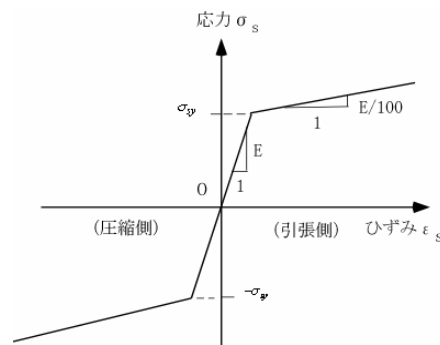


図 5.1-5-3 鋼材の応力-ひずみ曲線 (道示, 耐震設計編)

例題 5.1-6 設計に用いるコンクリートの応力-ひずみ曲線（道示関連：コンクリート橋編，耐震設計編）  
 一軸圧縮状態でのコンクリートの応力・ひずみ曲線の概要を述べ，設計に用いる応力・ひずみ曲線および強度の設計用値との関連性を述べよ。

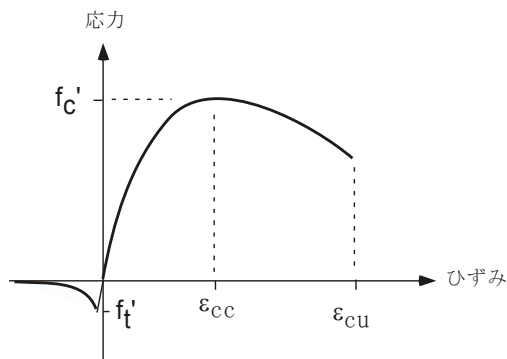


図 5.1-6-1 コンクリートの応力・ひずみ曲線

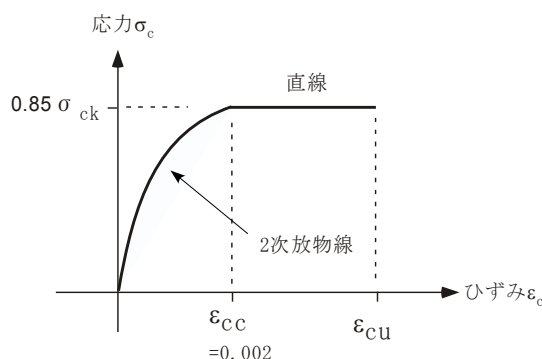


図 5.1-6-2 曲げ設計での応力・ひずみ曲線

解答

コンクリートの圧縮荷重実験および引張荷重実験に基づく 1 軸応力状態での応力・ひずみ曲線は一般に図 5.1-6-1 のように表される。

すなわち，応力・ひずみ曲線はピーク強度  $f_c'$  までは，応力度は一定の曲線で上昇し，ピーク強度を超えると，ひずみの増加につれて応力度が減少するというひずみ軟化領域に入る．終局ひずみ  $\epsilon_{cu}$  の大きさは， $f_c'$  や横方向の拘束条件に大きく依存する．

一方，引張強度  $f_t'$  は小さく， $f_c'$  の 1/12~1/10 程度と言われている．また， $f_t'$  を超えるとひび割れが発生し，ひび割れを有するコンクリートのひずみ軟化領域も存在するが，通常的设计では考慮しない場合が多い．

さて，コンクリートの圧縮強度，引張強度は多くの因子の影響を受け，非常にばらつくことの原因で，設計に用いる応力・ひずみ曲線は，図 5.1-6-1 のような曲線をそのまま用いないで，安全側（控えめ）の配慮により，ある種のモデル化がなされている．たとえば，図 5.1-6-2 は道路橋示方書，コンクリート橋編での終局曲げ強度の算定に用いるための応力・ひずみ曲線であり，コンクリートの曲げ圧縮強度は設計基準強度 ( $\sigma_{ck}$ ) の 0.85 倍に取っており，2 次放物線部は次式で与えている．

$$\sigma_c = 0.85\sigma_{ck} \times \frac{\epsilon_c}{0.002} \left( 2 - \frac{\epsilon_c}{0.002} \right) \quad (5.1-6-1)$$

終局ひずみ  $\epsilon_{cu}$  は， $\sigma_{ck} \leq 50\text{N/mm}^2$  のコンクリートに対しては 0.0035， $\sigma_{ck} \geq 60\text{N/mm}^2$  に対しては 0.0025 とし， $50 < \sigma_{ck} < 60\text{N/mm}^2$  に対しては両者を直線補完している．

なお，設計基準強度 ( $\sigma_{ck}$ ) については，道路橋示方書（コンクリート橋編）第 19 章施工ではつぎのように規定している．「コンクリートの配合強度は，供試体のどの試験値も設計基準強度の 85% 以上，かつ，引き続き採取した供試体の試験値のどの 3 回の平均値も設計基準強度以上となるように，品質のばらつきを考慮して定めるものとする．なお，試験値は同一バッチから取った供試体 3 個の圧縮強度の平均値

表 5.1-6-1 鉄筋コンクリート構造の許容圧縮応力度 (N/mm<sup>2</sup>)

設計基準強度 (N/mm <sup>2</sup> )	21	24	27	30
曲げ圧縮応力度	7.0	8.0	9.0	10.0
軸圧縮応力度	5.5	6.5	7.5	8.5

とする．また，鉄筋コンクリート構造に対する許容圧縮応力度は表 5.1-6-1 のように定めている．すなわち，許容曲げ圧縮応力度は設計基準強度の 1/3，許容軸圧縮応力度は設計基準強度の約 1/3.5 に採ってい

ることが分かる。

一方、土木学会、コンクリート標準示方書（平成 2002 年版）では限界状態設計法が採用されており、コンクリートの応力・ひずみ曲線は図 5.1-6-2 と同形であり、圧縮強度の代表値（特性値とも呼ばれている） $f_k$  は以下のように圧縮強度の確立分布を考慮して規定している。

$$f_k = f_m - k\sigma = f_m(1 - k\delta) \quad (5.1-6-2)$$

ここに、 $f_m$ ：試験値の平均値、 $\sigma$ ：試験値の標準偏差、 $\delta$ ：試験値の変動係数、 $k$ ：係数で試験値が特性値より下回る確率より定められている。たとえば、試験値が正規分布するし、下回る確率を 5% とすれば、 $k=1.64$  となる。一方、設計強度は式 (5.1-5-1) に安全係数（材料係数） $\gamma_m$  を掛けたもの、すなわち、 $f_{kd} = \gamma_m f_k$  を用いており、たとえば終局限界状態では  $\gamma_m = 1.3$  を用いている。

コンクリートの曲げ圧縮強度の設計値  $f_{cd}$ （図 5.1-6-2 における  $0.85\sigma_{ck}$  に相当する値）は、

$$f_{cd} = k_1 f'_{ck}, \quad k_1 = 1 - 0.003 f'_{ck}, \quad \text{ただし } k_1 \leq 0.85 \quad (5.1-6-3)$$

ここに、 $f'_{ck}$ ：圧縮強度の特性値である。また、図 5.1-6-2 での 2 次放物線の式は

$$\sigma_c = k_1 f'_{cd} \cdot \frac{\varepsilon_c}{0.002} \cdot \left( 2 - \frac{\varepsilon_c}{0.002} \right) \quad (5.1-6-4)$$

また、限界ひずみは

$$\varepsilon'_{cu} = \frac{135 - f'_{ck}}{30000}, \quad 0.0025 \leq \varepsilon'_{cu} \leq 0.0035 \quad (5.1-6-5)$$

ここに、 $f'_{ck}$  の単位は  $\text{N}/\text{mm}^2$  である。

つぎに、道路橋示方書（耐震設計編）では、コンクリートの応力・ひずみ曲線は図 5.1-6-3 のように与えられている。

図において、曲線部および直線部の式は

$$\begin{aligned} \sigma_c &= E_c \varepsilon_c \left\{ 1 - \frac{1}{n} \left( \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right)^{n-1} \right\}, \quad 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cc} \\ &= \sigma_{cc} - E_{des} (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc}), \quad \varepsilon_{cc} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \end{aligned}$$

(5.1-6-6)

ここに、

$$n = \frac{E_c \varepsilon_{cc}}{E_c \varepsilon_{cc} - \sigma_{cc}}, \quad \sigma_{cc} = \sigma_{ck} + 3.8 \alpha \rho_s \sigma_{sy},$$

$$\varepsilon_{cc} = 0.002 + 0.033 \beta \frac{\rho_s \sigma_{sy}}{\sigma_{ck}}$$

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{cc} \quad \text{〔タイプ I の地震動〕}$$

$$= \varepsilon_{cc} + \frac{0.2 \sigma_{cc}}{E_{des}} \quad \text{〔タイプ II の地震動〕}$$

$$E_{des} = 11.2 \frac{\sigma_{ck}^2}{\rho_s \sigma_{sy}}, \quad \rho_s = \frac{4 A_s}{s d} \leq 0.018$$

$\sigma_{ck}$ ：コンクリートの設計基準強度、 $\sigma_{sy}$ ：横拘束筋の降伏強度

$E_c$ ：コンクリートのヤング係数、 $\rho_s$ ：横拘束筋の体積比

$A_s$ ：横拘束筋の一本当りの断面積、 $s$ ：横拘束筋の間隔 (mm)、他

ピーク強度後のひずみ軟化領域は横方向筋の拘束によって発生するものであり、横拘束筋が無い場合には、終局ひずみ ( $\varepsilon_{cu}$ ) は 0.002 で打ち切るとしている。

以上に示したように、設計に用いる鋼とコンクリートの応力・ひずみ曲線は同じではなく、問題に応じて適宜モデル化されていることに留意する必要がある。

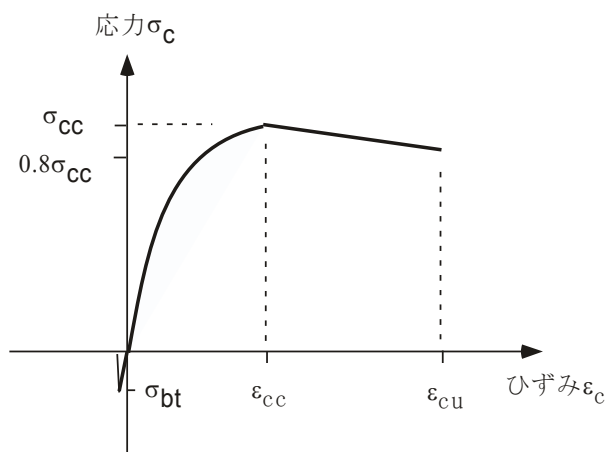


図 5.1-6-3 耐震設計に用いる応力・ひずみ曲線

## 5.2 曲げ応力に関する例題

### 例題 5.2-1 はりの曲げ応力（基本問題）

図 5.2-1-1 に示すような線形弾性ばりが曲げモーメント  $M_x$  を受けたときに、断面内に作用する応力  $\sigma_x$  は以下の式で与えられることは、はりの曲げ応力式としてよく知られている。この式の誘導過程と適用範囲について述べよ。

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I_z} y \quad (5.2-1-1)$$

ここに、 $I_z$  : 図心  $O$  をとおる水平軸（主軸） $z$  に関する断面 2 次モーメント、 $y$  :  $z$  軸からの距離（下方を正）である。

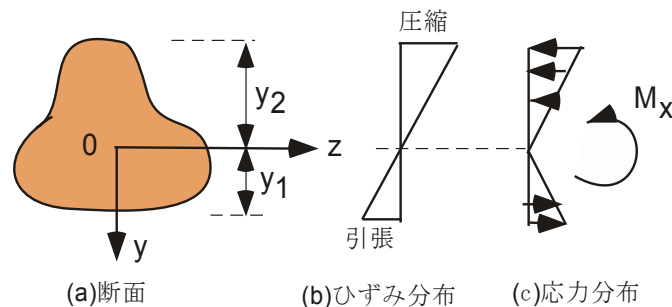


図 5.2-1-1 はりの曲げ応力分布

### 解答

はりや柱からなる骨組構造に荷重が作用するとたわみなどの変形が発生する。骨組構造の解析において、力のつり合い条件を変形後の形状に対して適用するのが有限変位理論である。有限変位理論は厳密であるが、支配方程式が非線形になり、解析が面倒になる。一方、構造物が変形しても力のつり合い条件を変形前の形状に対して適用するものを微小変形理論と呼んでいる。一般に、ケーブルやロープのようにたわみ易い部材からなる構造は別とすれば、通常の鋼げたや RC ばりの解析には微小変形理論が適用されている。また、はりやけたの曲げ変形問題の解析において、せん断変形を考慮する場合としない場合がある。前者は、スパン長に対するけた高比が大きい場合に適用されることがあるが、通常のはりやけたの設計ではせ

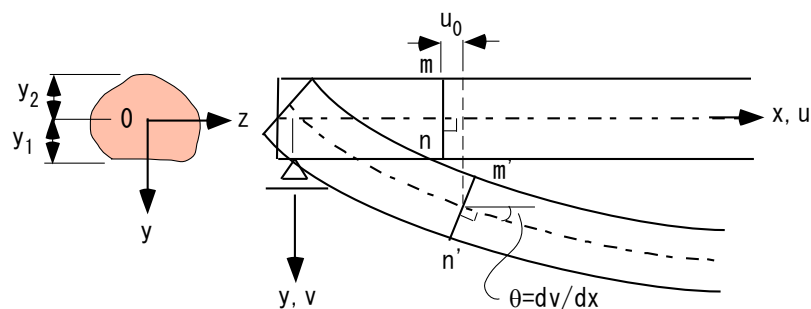


図 5.2-1-2 はりの曲げ変形

ん断変形が無視されることが多い。

さて、はりの曲げ変形問題において、断面のせん断変形を無視すれば、図 5.2-1-2 に示すように、変形前にはり軸に垂直な断面  $m-n$  は変形後の断面  $m'-n'$  に移動するが、 $m'-n'$  は平面で、かつはり軸に垂直である。このような断面が平面のまま移動する仮定は、“平面保持の仮定”と呼ばれており、曲げ応力式の誘導の基本仮定となっている。いま、図 5.2-1-2 のように座標軸をとり、 $x$  軸方向の変位を  $u$ 、 $y$  軸方向の変位を  $v$  とする。断面の図心  $O$  での  $x$  方向変位を  $u_0$ 、回転角（たわみ角）を  $\theta$  とすれば、

$$u = u_0 - \theta y \quad (5.2-1-2)$$

微小変位理論を適用し、たわみ角の符号は時計方向を正とすれば、 $\theta = dv/dx$  で与えられ、

断面内の任意点の x 方向のひずみは

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{du_0}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2}y \quad (5.2-1-3)$$

ここに、 $du_x/dx$  は図心での軸方向ひずみであり、 $-d^2v/dx^2$  ははりの軸線の曲率であり、下側に凸なるものを正としている。つぎに、はりは線形弾性体であり、弾性係数を  $E$  とすれば、フックの法則より

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\varepsilon_0 + E\phi y \quad (5.2-1-4)$$

ここに、 $\varepsilon_0 = du_x/dx$ 、 $\phi = -d^2v/dx^2$  である。図 5.2-1-2 の水平主軸 ( $z$  軸) の回りの曲げモーメント  $M_x$  と軸方向応力  $\sigma_x$  の関係より

$$M_x = \int_A \sigma_x y dA = E\varepsilon_0 \int_A y dA + E\phi \int_A y^2 dA \quad (5.2-1-5)$$

図心をとる  $z$  軸に関する断面 1 次モーメント ( $\int_A y dA$ ) はゼロであり、 $z$  軸に関する断面 2 次モーメントを  $I$  ( $= \int_A y^2 dA$ ) とすれば、 $\phi = M_x/EI$  であり、式(5.2-1-3)より、

$$\sigma_x = \frac{M_x}{I} y \quad (5.2-1-6)$$

すなわち、平面保持の仮定による断面内のひずみおよび応力は直線分布であり、最大および最小応力度は

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{I} y_1 = \frac{M_x}{Z_1}, \quad \sigma_{\min} = -\frac{M_x}{I} y_2 = -\frac{M_x}{Z_2} \quad (5.2-1-7)$$

ここに、応力度は引張を正としており、 $Z_{1,2} = I/y_{1,2}$  (複号同順) は断面係数と呼ばれている。

### 例題 5.2-2 柱の応力 (基本問題)

図 5.2-2-1 に示すような、柱の断面内の図心  $O$  を原点にとった直交座標 ( $z, y$ ) があり、座標軸から偏心距離 ( $e_z, e_y$ ) の位置に軸方向集中荷重  $P$  が作用したときに、柱断面内の軸方向応力  $\sigma_x$  を求める式はどのようなになるか？ただし、断面の主軸の方向は図に示すように  $z$  軸より、反時計方向に  $\theta$  および  $\theta + \pi/2$  だけ傾いているものとする。

#### 解答

荷重  $P$  による作用モーメントは、 $z$  軸回りには  $M_z = -Pe_z$ 、 $y$  軸回りには  $M_y = Pe_y$ 、ただしモーメントベクトルの符号は座標軸にあわせている。これらのモーメントベクトルを主軸 ( $\bar{z}, \bar{y}$ ) の方向のベクトルに変換すれば以下のようなになる。

$$\begin{aligned} M_{\bar{z}} &= M_z \cos \theta + M_y \sin \theta \\ M_{\bar{y}} &= M_y \cos \theta - M_z \sin \theta \end{aligned} \quad (5.2-2-1)$$

同様に、主軸 ( $\bar{z}, \bar{y}$ ) に関する偏心距離は

$$\begin{aligned} e_{\bar{z}} &= e_z \cos \theta - e_y \sin \theta \\ e_{\bar{y}} &= e_y \cos \theta + e_z \sin \theta \end{aligned} \quad (5.2-2-2)$$

したがって、曲げ応力式 (5.2.1-1) をそれぞれのモーメントに対して適用し、軸圧縮力  $P$  による応力を付け加えれば、断面内の軸方向応力は

$$\sigma_x = \frac{P}{A} + \frac{M_{\bar{z}}}{I_{\bar{z}}} \bar{y} + \frac{M_{\bar{y}}}{I_{\bar{y}}} \bar{z} \quad (5.2-2-3)$$

ただし、圧縮応力を正に採っている。

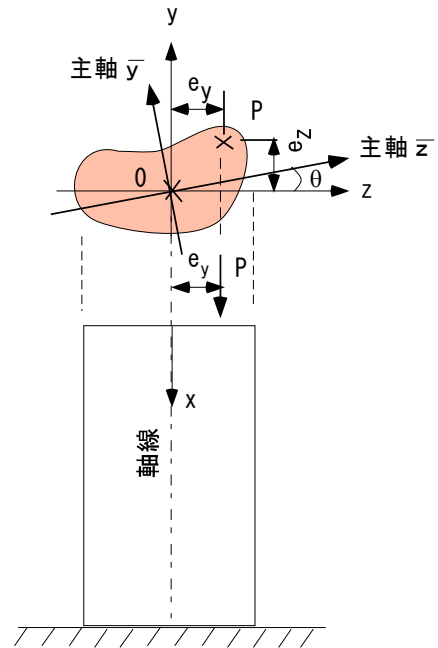


図 5.2-2-1 2 軸偏心荷重を受ける柱



例題 5.2-3 鉄筋コンクリートばりの曲げ応力（基本問題）

鉄筋コンクリートばりの曲げ応力はどのように求めるのか？図 5.2-3 の単鉄筋長方形断面を例にとって説明せよ。また式 (5.2-1-1) を適用した場合にはどのようになるかを説明せよ。

解答

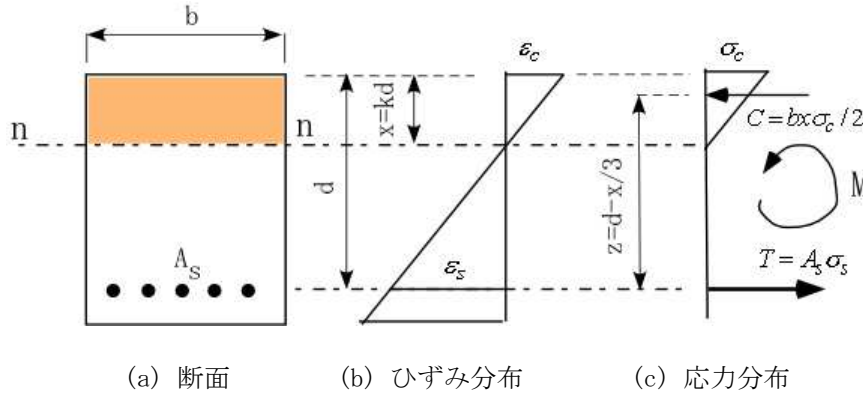


図 5.2-3-1 長方形 RC 断面の曲げ応力

例題 5.2-1 で述べたように，“平面保持の仮定”にしたがえば，断面内のひずみ分布は直線になる（図 5.2-3-1(b) 参照）．鉄筋コンクリートばりの弾性設計では，コンクリートおよび鉄筋は線形弾性体とし，コンクリートの引張強度を無視するのが普通である．すなわち，

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_c, \text{ ただし圧縮領域のみに適用} \quad (5.2-3-1)$$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (5.2-3-2)$$

ここに， $\sigma_c, \varepsilon_c$  : コンクリートの応力およびひずみ， $\sigma_s, \varepsilon_s$  : 鉄筋の応力およびひずみ， $E_c, E_s$  : コンクリートおよび鉄筋の弾性係数，である．圧縮領域のひずみ分布形は 3 角形であるので，応力分布も 3 角形であり，コンクリート断面の圧縮力  $C$  の重心と鉄筋の引張力  $T$  の重心までの距離  $z$  は，

$$z = d - \frac{x}{3} \quad (5.2-3-3)$$

ここに， $d$  : 有効高さ， $x$  : コンクリートの圧縮域の高さである．作用曲げモーメントを  $M$  とすれば，つり合い条件より，

$$C = \sigma_c bx / 2, \quad T = A_s \sigma_s \quad (5.2-3-4)$$

$$M = Cz = Tz$$

ここに， $A_s$  : 鉄筋の総断面積である．断面の曲率を  $\phi$  とすれば，図 4.3-2-1(b) より

$$\varepsilon_c = x\phi, \quad \varepsilon_s = (d - x)\phi \quad (5.2-3-5)$$

式(4.3-3-1)および式(4.3-3-2)を考慮すれば，

$$\sigma_s = \frac{n(d - x)}{x} \sigma_c \quad (5.2-3-6)$$

ここに， $n = E_s / E_c$  である．断面力は曲げモーメント  $M$  のみで，軸力  $N$  は無いので，

$$C - T = 0$$

(5.2-3-7)

上式に式(5.2-3-4)および式(5.2-3-6)を代入すれば，

$$\frac{bx^2}{2} - nA_s(d - x) = 0 \quad (5.2-3-8)$$

上式は  $x$  に関する 2 次方程式であるので，その解は

$$x = \frac{nA_s}{b} \left[ -1 \pm \sqrt{1 + \frac{2bd}{nA_s}} \right] \quad (5.2-3-9)$$

ただし、 $x > 0$  より、平方根の前の符号は+のみが有効である。

コンクリートの応力  $\sigma_c$  および鉄筋の応力  $\sigma_s$  は、式(5.2-3-1)～式(5.2-3-4)より

$$M = \frac{\sigma_c b x}{2} \left( d - \frac{x}{3} \right) = A_s \sigma_s \left( d - \frac{x}{3} \right) \quad (5.2-3-10)$$

よって

$$\sigma_c = \frac{2M}{bx(d-x/3)}, \quad \sigma_s = \frac{M}{A_s(d-x/3)} \quad (5.2-3-11)$$

つぎに、式(5.2-1-1)を適用すると、図 5.2-3-1(a) の中立軸 n-n に関する断面 2 次モーメント (ただし、コンクリート断面に換算ずる) は

$$I_v = \frac{bx^3}{3} + nA_s(d-x)^2 \quad (5.2-3-12)$$

よって

$$\sigma_c = \frac{M}{I_v} x, \quad \sigma_s = \frac{nM}{I_v} (d-x) \quad (5.2-3-13)$$

$x$  は式(5.2-3-9)にしたがえば、式(5.2-3-13)は式(5.2-3-11)と同等であることが分かる。

#### 例題 5.2-4 曲げモーメントと軸力を受ける鉄筋コンクリート部材の応力 (基本問題)

図 5.2-5.1 の単鉄筋長方形断面において、曲げモーメント  $M$  と軸圧縮力  $N$  が同時に作用したときのコンクリート応力  $\sigma_c$  および鉄筋の応力  $\sigma_s$  がどのように変化するかを述べよ。ただし、軸圧縮力  $N$  の作用位置はひび割れ前のコンクリート断面の中心  $o$  とし、 $N$  の大きさは中立軸が鉄筋位置より上になるような大きさとする。

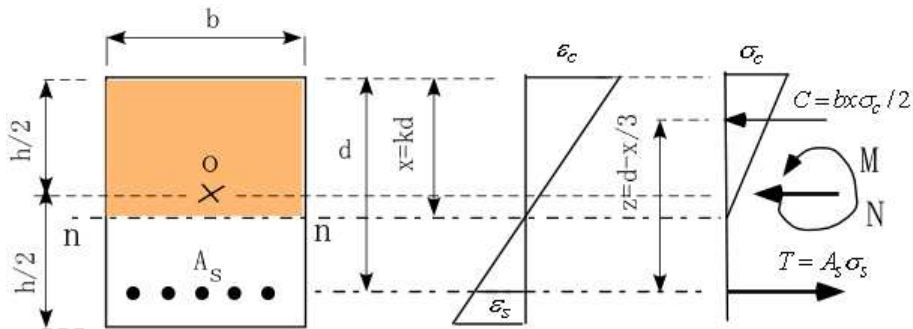


図 5.2-5.1 曲げモーメントと軸圧縮力を受ける RC 断面

前例題との相違を考慮すれば、軸方向のつり合い条件は

$$C - T = N \quad (5.2-5.1)$$

よって、式(5.2-3-7)は以下のように変わる。

$$\frac{bx}{2} \sigma_c - A_s \sigma_s - N = 0$$

(5.2-5.2)

したがって、曲率を  $\phi$  とし、式(5.2-3-5)を考慮すれば

$$\frac{bx^2}{2} E_c \phi - A_s E_s \phi (d-x) - N = 0 \quad (5.2-4-3)$$

一方、断面中心  $o$  に関するモーメントのつり合い条件より

$$C \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) + T \left( d - \frac{h}{2} \right) - M = 0 \quad (5.2-4-4)$$

よって

$$E_c \phi \frac{bx^2}{2} \left( \frac{h}{2} - \frac{x}{3} \right) + E_s \phi A_s (d-x) \left( d - \frac{h}{2} \right) - M = 0 \quad (5.2-4-5)$$

$e = M/N$ ,  $n = E_s/E_c$  において, 式(5.2-4-3)と式(5.2-4-5)から  $E_c \phi$  を消去すれば, つぎの  $x$  に関する 3 次方程式が求められる.

$$x^3 - \frac{3h-6e}{2}x^2 + \frac{3nA_s(2d-h+2e)}{b}x - \frac{3nA_s d}{b}(2d-h+2e) = 0 \quad (5.2-4-5)$$

$0 < x < d$  にある式(5.2-4-5)の根を  $x_1$  とすれば, 式(5.2-3-6)および式(5.2-5.2)より

$$\sigma_c = \frac{2N}{bx_1 - 2nA_s(d-x_1)/x_1}, \quad \sigma_s = \frac{2n(d-x_1)N}{bx_1^2 - 2nA_s(d-x_1)} \quad (5.2-4-6)$$

となる. なお, 式(5.2-4-6)の適用範囲は,  $0 < x_1 \leq d$  および式(5.2-4-5)より

$$0 < N \leq \frac{6M}{3h-2d} \quad (5.2-6-7)$$

である.

(注) 曲げモーメント  $M$  と軸力  $N$  を同時に受ける RC 断面の問題においては,  $N$  の作用位置が重要な要因になる. すでに例題 1.1-6 で述べたように, 骨組構造では, 部材断面の軸力の作用線は軸線が通る位置に採るのが一般的である. したがって, 本例題においては, 軸線がコンクリート断面の中心にあると暗黙の仮定があることに留意されたい. もちろん, 鉄筋を考慮したコンクリートの換算断面の図心に軸力の作用位置をとることもできるが, この場合は骨組構造解析における軸線も同じ図心に採る必要があることは言うまでもない.