

# Chap. 4 荷重分配と影響線

## 4.1 影響線に関する例題

### 例題 4.1-1 影響線（基本問題）

影響線とはどのようなものか？また、影響線はけた橋の荷重分配にどのように利用できるかを示せ。

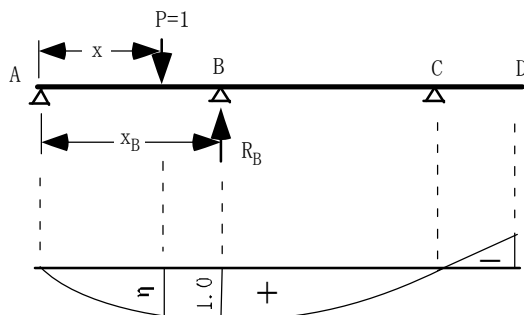


図 4.1-1-1 連続げたの支点反力 (\$R\_B\$) の影響線の例

### 解答

影響線とは、はりの任意の位置 (\$x\$) に単位の集中荷重 (\$P=1\$) が作用したときに、着目位置 (\$x\_q\$) の断面力あるいは支点反力の値 (\$\eta\$) を \$x\$ の関数として表した線図である。図 4.1-1-1 には、\$x\_B\$ 点の支点反力の影響線の概形を示している。影響線は荷重作用位置 (\$x\$) と着目位置 (\$x\_q\$) の関数として以下のように表される。

$$\eta = f(x, x_q) \quad (4.1-1-1)$$

はりが線形弾性体で、かつたわみが微小であるような線形問題では、複数の荷重群が作用する場合の応答は個々の荷重群の応答の和として与えられ、これを重ね合わせの原理と呼んでいる。したがって、線形問題では、多数の集中荷重 \$P\_i, i=1,2,3,\dots\$ が位置 \$x\_i\$ に作用するときの、断面力や支点反力の値 \$Q\_c\$ は、影響線を用いて以下のように表される。

$$Q_c = \sum_i P_i f(x_i, x_q) \quad (4.1-1-2)$$

また、任意の分布荷重 \$p(x)\$ が作用するときは

$$Q_c = \int p(x) f(x, x_q) dx \quad (4.1-1-3)$$

等分布荷重 \$p\_0\$ の場合は

$$Q_c = \int p_0 f(x, x_q) dx = p_0 \int f(x, x_q) dx = p_0 A_q \quad (4.1-1-3)$$

ここに、\$A\_q\$ は \$p\_0\$ の作用区間での影響線が描く面積を表す。

影響線は、多主げた橋の設計において、床版に作用する荷重のけたへの分配率の算定によく利用される。この場合は、床版が主げたで支えられているので、支点反力 \$Q\_c\$ が主げたへの分配力になる。

なお、はりが弾塑性体（材料非線形問題）やたわみが大きい（有限変位問題）などの非線形問題では、荷重の載荷経路の影響を受け、重ね合わせの原理が適用できず、式(4.1-1-2)や式(4.1-1-3)が成立しないことに留意する必要がある。

### 例題 4.1-2 仮想変位の原理（基本問題）

図 4.1-2-1 に示すような、張り出しばかりおよび連続ばかりの支点反力の影響線を仮想変位の原理または相

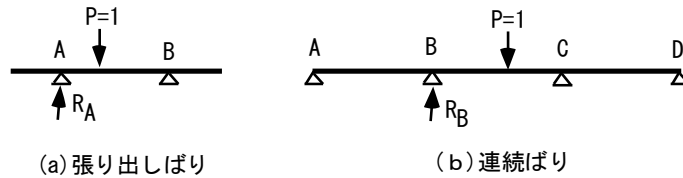


図 4.1-2-1 支点反力の影響線

反作用の原理を用いて求めよ。

**解答**

張り出しばりまたは連続ばりにおいて着目する支点を取り除いた構造系を考える。張り出しばりは静定であるから、この構造系は不安定になり、3 径間連続ばりは 2 次不静定であるので、1 次不静定となる。これらの構造系において、着目支点を単位量( $\delta=1$ )だけ沈下させたときの変位曲線を求める。このような曲線は不安定系では剛体としての変位であり、図 4.1-2-2(a)に示すように、B を支点とした回転変位になり、連続ばりでは、1 次不静定ばりの支点 B に集中荷重を作用させたときのたわみ曲線となる。これらの変位曲線は、適合条件を有する一つの可能な変位場であり仮想変位と呼ばれている。

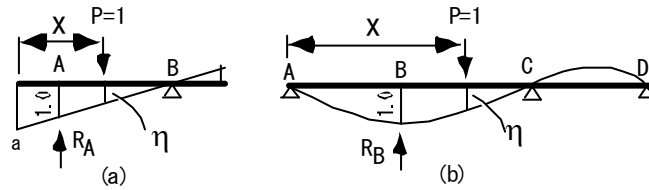


図 4.1-2-2 仮想変位と影響線

さて、図 4.1-2-2(a)において、任意位置(x)の仮想変位を  $\eta$  とし、この位置に単位荷重( $P=1$ )を作用させ、剛体に対する仮想変位の原理を適用すると、

$$\delta\pi = 1 \times \eta - R_A \delta = 0 \tag{4.1-2-1}$$

仮想変位の任意性により  $\delta=1$  とすると、 $R_A = \eta$ 、よって  $R_A$  の影響線は  $\eta$  が描く曲線（仮想変位曲線）と同じになる。

つぎに、図 4.1-2-2(b)に示すように、支点 B を取り除いた構造系に対して、任意位置(x)に  $P=1$  が作用したときの支点 B のたわみを  $\delta_{Bx}$ 、支点 B に  $P=1$  が作用したときの支点 B の弾性たわみを  $\delta_{BB}$  とすれば、支点 B が沈下しない条件（適合条件）は

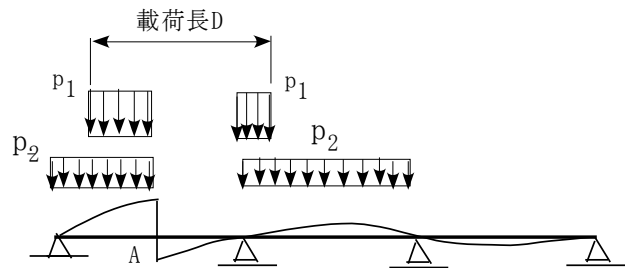
$$\delta_{Bx} - R_B \delta_{BB} = 0 \tag{4.1-2-2}$$

相反作用の原理より、 $\delta_{Bx} = \delta_{xB}$  であるので、

$$R_B = \delta_{xB} / \delta_{BB} = \eta \tag{4.1-2-3}$$

ここに、 $\delta_{xB}$  は支点 B に  $P=1$  が作用したときの荷重位置(x)のたわみである。したがって、支点反力  $R_B$  の影響線は、支点 B に集中荷重をかけ、支点 B が単位変位するようなたわみ曲線と同じになる。

以上により、静定ばりの支点反力の影響線は剛体としての仮想変位の原理により容易に求められ、不静定ばりの支点反力の影響線は、着目した支点を取り除き、その点に集中荷重をかけたときの弾性たわみ曲線として求められる。これらは、Muller-Breslau（ミュラー・ブレスロウ）の原理として知られている。この原理は影響線の概形を求めるときに非常に便利であると言える。



A断面におけるせん断力の影響線

**例題 4.1-3 荷重作用**（道示関連：共通編、荷重）  
道路橋示方書共通編では、図 4.1-4.1 に示すよう

図 4.1-4.1 複数の等分布荷重の載荷方法

に連続げた橋へのL活荷重の載荷方法は、影響線を用いた断面力等が最も不利になるように選んでいる。ところで、連続げたの曲げモーメントやせん断力の影響線の概形を Muller-Breslau の原理を用いて求めよ。

**解答**

前述したように、Muller-Breslau の原理により、連続げたの断面力の影線は、着目点での対応する拘束を解除し、単位の不連続位を与えたときに描いたたわみ曲線と同形である。したがって、図 4.1-4.2(a)に示すように、3 径間連続ばりの任意点 A の曲げモーメントの影響線を求めるには A 点にヒンジを挿入し、左右の部材のヒンジ端に上側引張になるような一对のモーメント荷重  $M_A$  を与えたときに描いたたわみ曲線  $v_A$  でヒンジ点での左右のたわみ角の差が 1.0 になるものが求める影響線（ただし、 $M_A$  は曲げモーメントの符号と逆）になる。

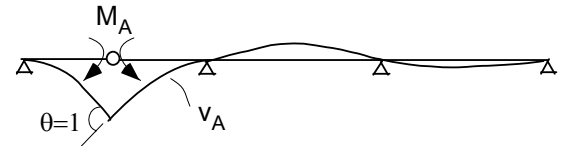
同様に、A 点のせん断力の影響線は、図 4.1-4.2(b)に示すように、A 点に鉛直方向のスライダーを挿入し、左右のたわみ角を連続させながら、上下に単位のたわみの不連続量を与えたときに描いたたわみ曲線になる。

以上のように Muller-Breslau の原理によって、任意の連続げたの影響線の概形を容易に求めることができ、活荷重の載荷によって発生する正または負の断面力の最大値を求めるには、図 3.3-4.2 の影響線のそれぞれ正または負の領域について式 (4.1-1-3) の積分を実行すればよい。

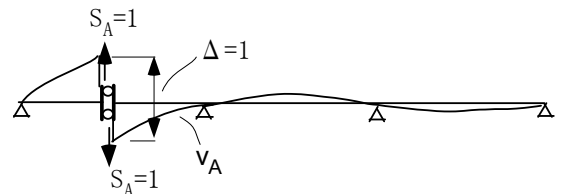
ところで、図 4.1-4.1 での 2 種類の等分布活荷重  $p_1$  および  $p_2$  による A 点の負の最大せん断力は

$$S_{\max} = p_1 A_{11} + p_1 A_{12} + p_2 A_{21} + p_2 A_{22} \quad (4.1-4.1)$$

ここに、 $A_{11}, A_{12}$  は図 1.3-4.1 において、 $p_1$  の作用区間での負の影響線のそれぞれの面積、 $A_{21}, A_{22}$  は  $p_2$  の作用区間での側の影響線のそれぞれの面積である。



(a) 曲げモーメントの影響線



(b) せん断力の影響線

図 4.1-4.2 Muller-Breslau の原理による影響線

**3.2 荷重分配に関する例題**

**例題 4.2-1 荷重分配 (道示関連：共通編、荷重)**

道路橋示方書 (共通編) では、多主げた橋の L 活荷重の載荷方法として、図 4.2-1-1 に示すように、着目主げたの反力の影響線を用いて荷重分配を求める方法が推奨されている。このような多主げた橋の荷重分配法にはどのようなものがあるかを述べよ。

**解答**

2 主げた橋の荷重分配には、床版は 2 主げたで支えられているので、図 4.1-2-2(a) に示した静定系である張り出しばりの影響線が利用できるが、3 主げた以上の多主げた橋の場合は、けたの沈下の影響を考慮した影響線を用いる必要がある。

- 床版とけたの剛性を考慮した荷重分配法には、  
 (1) けたのたわみ剛性をバネで近似する方法、  
 (2) 格子げた理論による方法、(3) 直交異方性板理

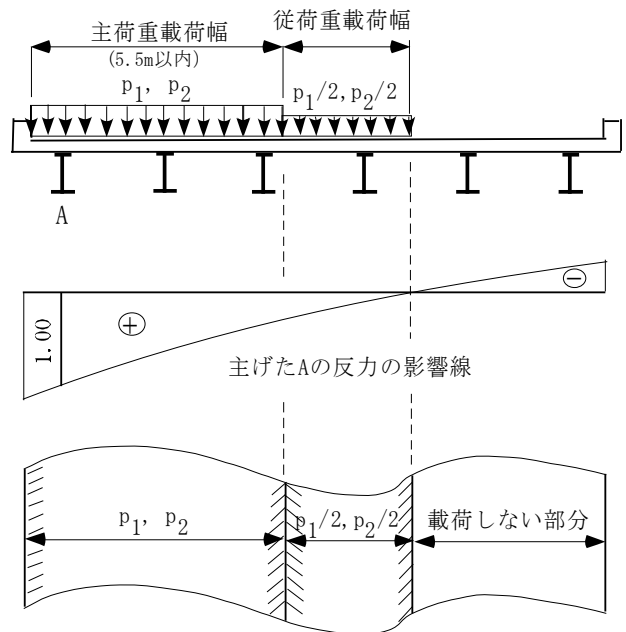


図 4.2-1-1 多主げた橋の荷重分配

論による方法、などがある。(1)は主げた位置でバネで支えられた床版の影響線を利用する方法であり、バネの剛性は主げたのたわみ剛性によって与える。(2)はけた組みと床版を一体化した構造を格子構造として、けた組みの荷重分配を求める方法であり、(3)は直交異方性板とみなした荷重分配方法である。

**例題 4.2-2 荷重分配 (その 1) (道示関連：共通編、荷重分配係数)**

前例題の(1)に属する荷重分配法に関連して、図 4.2-2-1 に示すような、3 主げた橋のけた A の反力の影響線を求めよ。ただし、主けたの剛性は  $k$  で、床版の横方向剛性は  $EI$  とする。

**解答**

図 4.2-2-1 に示すように、主けたの位置での 3 つのバネで支えられた曲げ剛性  $EI$  のはりの影響線を考える。Muller-Breslau の原理より、支点 A をはずし、反力  $R_A$  をはりとバネにかけたときの相対変位  $\Delta_A$  が単位になるようなたわみ曲線が反力 A の影響線になる。すなわち、 $R_A = 1$  による A 点のはりのたわみを  $\delta_{AA}$  とすれば、

$$\Delta_A = R_A \delta_{AA} + R_A / k = 1 \tag{4.2-1-1}$$

各支点のバネ反力を  $R_A, R_B, R_C$  とし、A-B および B-C 間のはりの曲げモーメントを  $M_x, M_{x'}$  とすると、全

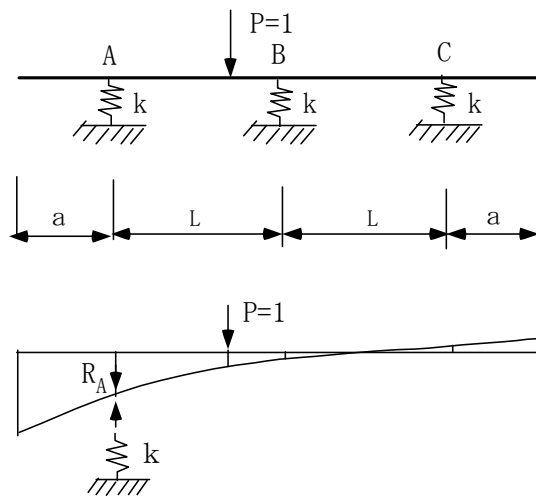


図 4.2-2-1 バネ支承を有する連続ばり

補ひずみエネルギー  $U$  は

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^L M_x^2 dx + \frac{1}{2EI} \int_0^L M_{x'}^2 dx' + \frac{R_A^2 + R_B^2 + R_C^2}{2k} \tag{4.2-2-2}$$

ここに、 $M_x = R_A x, M_{x'} = R_C x'$

つり合い条件より、 $R_C = R_A, R_B = -2R_A$  であるので、カスチリアーノの定理により

$$\Delta_A = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \frac{2}{EI} \int_0^L R_A x^2 dx + \frac{6}{k} R_A = \frac{2R_A L^3}{3EI} + \frac{6}{k} R_A \tag{4.2-2-3}$$

$\Delta_A = 1$  より、

$$R_A = \frac{3kEI}{2kL^3 + 18EI} \tag{4.2-2-4}$$

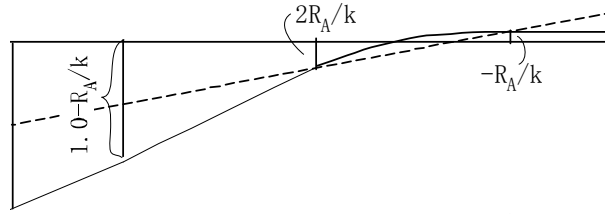


図 4.2-2-2 支点 A の反力の影響線

したがって、支点 A の反力の影響線は図 4.2-2-2 に示すように、バネ支承 B, C を有する張り出しばりに A 点に集中荷重  $R_A$  をかけたときのたわみ曲線と相似で、A 点での縦距は  $1.0 - R_A/k$  になる。

以上は応力法による多主げた橋の横方向影響線の求め方をしめしたが、4 主げた以上の多主げた橋では、変位法による解析が一般的である。

#### 例題 4.2-3 荷重分配（その 2）（道示関連：共通編、荷重分配係数）

けた橋の荷重分配の設計において、ギオン・マソネの図表が利用されることがある。この方法は、例題 4.2-1 での(3)に位置する方法であるが、その概要を述べよ。

解答

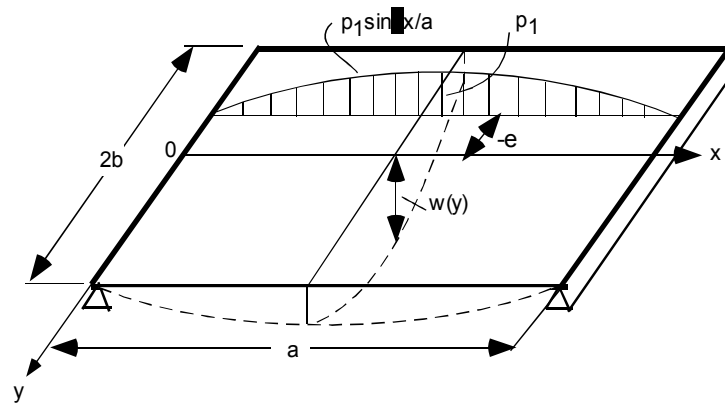


図 4.2-4.1 正弦曲線分布荷重

この方法は、図 4.2-4.1 に示すように、支間長  $a$ 、幅  $2b$  の単純多主げた橋を床版を含めて直交異方性板と見なしている。直交異方性板のたわみ  $w$  に関する基礎微分方程式は以下のように表される。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (4.2-4.1)$$

ここに、 $D_x, D_y$ ：それぞれ  $x, y$  方向の単位幅当りの平均曲げ剛性、 $H = 2D_{xy}$ 、 $D_{xy}$ ：単位幅当りの平均ねじり剛性、 $p(x, y)$ ：分布荷重強度である。 $x$  軸より偏心量  $e$  の位置に正弦分布する線荷重  $p(x) = p_1 \sin \pi x/a$  を受けるときのたわみ曲面を以下のように与える。

$$w(x, y) = W(y) \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4.2-4.2)$$

もし、線荷重  $p(x)$  が幅方向に一様に分布するとし、平均荷重  $p(x)/2b$  によるたわみ面を以下のように表すと、

$$w_0(x) = W_0 \sin \frac{\pi x}{a} \quad (4.2-3-3)$$

$w_0(x)$  に対する  $w(x, y)$  の比、すなわち、

$$K(y) = \frac{w(x, y)}{w_0(x)} = \frac{W(y)}{W_0} \quad (4.2-3-4)$$

を荷重の横分配係数と呼んでいる。あらかじめ、線荷重  $p(x)$  に対して式(4.2-4.1)の微分方程式を解き、 $y$

方向の任意の位置での横分配係数  $K(y)$  を図表化しておけば、各けたの位置  $y_i$  でのたわみや曲げモーメントは以下のように求められる。

$$\begin{aligned} w(x, y_i) &= K(y_i)w_0(x) \\ M_x(x, y_i) &= K(y_i)M_{0x}(x) \end{aligned} \quad (4.2-3-5)$$

ここに、 $w_0(x), M_{0x}(x)$  は平均荷重  $p(x)/2b$  によるたわみおよび曲げモーメントであり、単純ばりとしての計算より容易に求められる。 $K(y)$  はギオン・マソネの図表として発表されている。(たとえば、構造力学公式集、土木学会、昭和 49 年 12 月参照)

コンピュータによる構造解析法が発達した今日、設計計算の実務においては、影響線やギオン・マソネの図表を利用して荷重分配係数を求めることが少ないかもしれないが、概略設計の段階なので、荷重分配の概要を知る場合には、Muller-Breslau の原理に基づく影響線やギオン・マソネの図表が役立つように思われる。