

Chap. 3 構造解析法

3.1 骨組構造の解析手法に関する例題

3.1-1 応力法と変位法（基本問題）

弾性骨組構造の解析法は、応力法と変位法に大別できるが、図 3.1-1-1 に示すようなラーメン構造の解析に対する応力法、変位法とはどのような解法であるかを述べよ。

解答

応力法は、外的および内的につり合う応力場（静的許容応力場）の中から変形の連続条件（適合条件）を満足する解を見出す方法であり、変位法は適合条件を満足する変位場からつり合い条件を満足する解を見出す方法である。

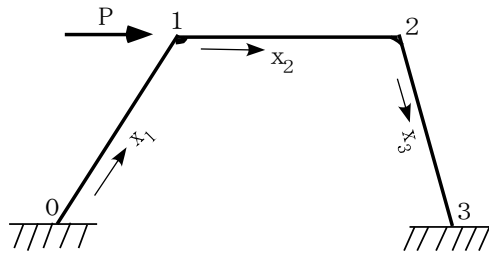


図 3.1-1-1 π形ラーメン構造

図 3.1-1-1 のラーメン構造は 3 次不静定系であるから、3 つの拘束点を解除すれば静定構造（静定基本系と呼ぶ）が得られる。一例として、図 3.1-1-2(a) に示すように、固定端 3 をフリーにし、水平拘束、鉛直拘束および回転拘束を解除すれば、図 3.1-1-1(a) に示す片持はり形式の静定基本系を得る。応力法では、まず最初に解除前に有している拘束力（不静定力と呼ぶ）を未知数（ X_1, X_2, X_3 ）として、静定基本系の各部材（ $i=1,2,3$ ）に作用する断面力である曲げモーメント（ M_i ）、軸力（ N_i ）およびせん断力（ S_i ）をつり合い条件より求める。すなわち重ね合わせの原理より

$$M_i = \bar{M}_0 P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3$$

$$N_i = \bar{N}_0 P + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3 \tag{3.1-1-1}$$

$$S_i = \bar{S}_0 P + \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \bar{S}_3 X_3$$

ここに、 $\bar{M}_0, \bar{N}_0, \bar{S}_0$ は $P=1$ による静定基本系の断面力、 $\bar{M}_j, \bar{N}_j, \bar{S}_j, j=1,2,3$ は $X_j=1$ による静定基本系の断面力である。

節点 1 および 2 での適合条件は、最小補仕事の原理により求められる。すなわち、系の全補仕事を W' とすれば、

$$W' = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2EI_i} \int_0^{l_i} M_i^2 dx_i + \frac{1}{2EA_i} \int_0^{l_i} N_i^2 dx_i + \frac{1}{2kGA_i} \int_0^{l_i} S_i^2 dx_i \right] \tag{3.1-1-2}$$

ここに、 l_i は部材長、 EI_i, EA_i, kGA_i は部材 i のそれぞれ曲げ剛性、軸剛性およびせん断剛性である。最小補仕事の原理より、

$$\frac{\partial W'}{\partial X_j} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{EI_i} \int_0^{l_i} M_i \frac{\partial M_i}{\partial X_j} dx_i + \frac{1}{EA_i} \int_0^{l_i} N_i \frac{\partial N_i}{\partial X_j} dx_i + \frac{1}{kGA_i} \int_0^{l_i} S_i \frac{\partial S_i}{\partial X_j} dx_i \right] = 0 \tag{3.1-1-3}$$

ただし、 $j=1,2,3$ である。通常、軸力やせん断力による変形の影響は曲げ変形の影響より小さく、上式の右辺の第 3.2 項は無視される場合が多い。この場合、式(3.1-1-1)を式(3.1-1-3)に代入すれば、 X_j に関する以下の連立 1 次方程式が求めら、これを弾性方程式と呼んでいる。

$$\sum_{j=1}^3 a_{kj} X_j = -Pa_{k0} \tag{3.1-1-4}$$

ここに、 $k=1,2,3$ であり、各係数は次式で与えられる。

$$a_{kj} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{EI_i} \int \bar{M}_k \bar{M}_j, \quad a_{k0} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{EI_i} \int \bar{M}_0 \bar{M}_k \quad (3.1-1-5)$$

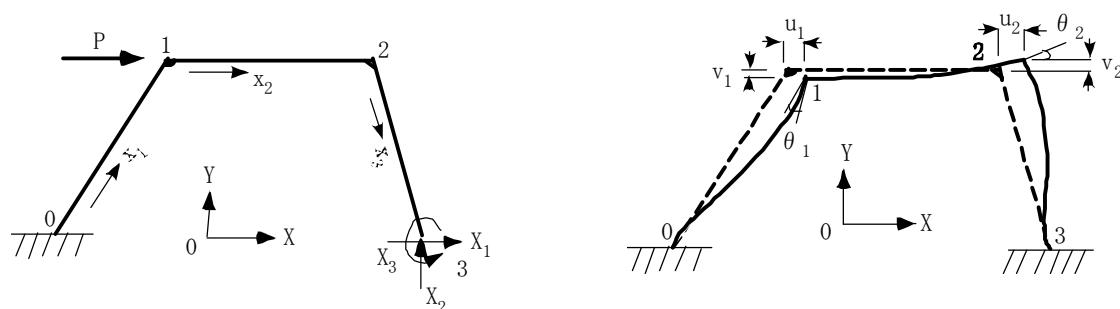
応力法は、式(3.1-1-4)の弾性方程式の解より不静定力($X_j, j=1,2,3$)を求め、静定基本系における断面力を重ね合わせの原理より各部材の断面力を決定する方法である。すなわち、

$$\begin{aligned} M_i &= \bar{M}_0 P + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2 + \bar{M}_3 X_3 \\ N_i &= \bar{N}_0 P + \bar{N}_1 X_1 + \bar{N}_2 X_2 + \bar{N}_3 X_3 \\ S_i &= \bar{S}_0 P + \bar{S}_1 X_1 + \bar{S}_2 X_2 + \bar{S}_3 X_3 \end{aligned} \quad (3.1-1-6)$$

つぎに、変位法については、図3.1-1-2(b)に示すように、部材の変形性状に着目し、全体座標系(0-X-Y)に沿った節点変位を未知数に選ぶ。すなわち、節点1,2での節点変位ベクトルを以下のように表す。

$$\mathbf{u}_1 = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1]^T, \quad \mathbf{u}_2 = [u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T \quad (3.1-1-7)$$

ここに、 u_i はX方向変位成分、 v_i はY方向変位成分、 θ は回転成分であり、右肩のTは転置を意味している。



(a) 静定基本系と不静定力

(b) 節点変位と部材変形

図3.1-1-2 応力法と変位法での取り扱い

図3.1-1-3に示すような、任意部材a-bの部材軸に沿った局所座標系(x-y)に沿った材端変位ベクトルを $\bar{\mathbf{u}}_a = [\bar{u}_a \quad \bar{v}_a \quad \bar{\theta}_a]^T$ 、 $\bar{\mathbf{u}}_b = [\bar{u}_b \quad \bar{v}_b \quad \bar{\theta}_b]^T$ とし、材端力ベクトルを $\bar{\mathbf{P}}_a = [N_a \quad S_a \quad M_a]^T$ 、 $\bar{\mathbf{P}}_b = [N_b \quad S_b \quad M_b]^T$ とすれば、両者の関係は以下のように表される。

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_a \\ \bar{\mathbf{P}}_b \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{K}}_i \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_a \\ \bar{\mathbf{u}}_b \end{bmatrix} \quad (3.1-1-8)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{K}}_i$ は要素剛性行列と呼び、以下のように表される。

$$\bar{\mathbf{K}}_i = \frac{E}{l_i^3} \begin{bmatrix} A_i l_i^2 & 0 & 0 & -A_i l_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 12I_i & 6I_i l_i & 0 & -12I_i & 6I_i l_i \\ 0 & 6I_i l_i & 4I_i l_i^2 & 0 & -6I_i l_i & 2I_i l_i^2 \\ -A_i l_i^2 & 0 & 0 & A_i l_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & -12I_i & -6I_i l_i & 0 & 12I_i & -6I_i l_i \\ 0 & 6I_i l_i & 2I_i l_i^2 & 0 & -6I_i l_i & 4I_i l_i^2 \end{bmatrix} \quad (3.1-1-9)$$

ここに、局所座標系(0-x-y)から全体座標系(0-X-Y)への座標変換行列を \mathbf{T}_i とすれば、節点1,2でのつり合い条件は以下のように表される。

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R} \quad (3.1-1-10)$$

ここに、 \mathbf{K} は全体剛性行列と呼び、

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^2 (\mathbf{T}_i \bar{\mathbf{K}}_i \mathbf{T}_i^T), \quad \mathbf{U} = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T, \quad \mathbf{R} = [P \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

式(3.1-1-10)は節点変位に関する連立1次方程式を与え、その解より \mathbf{U} が決定でき、ついで式(3.1-1-8)

を用いて各部材の材端力ベクトルが決定できる．すなわち，応力法では不静定力を未知数として節点での

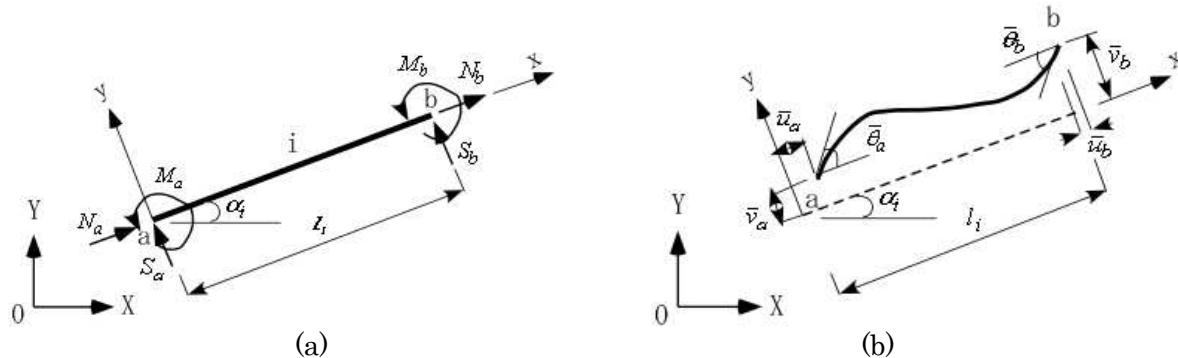


図 3.1-1-3 材端力と材端変位

適合条件によって解析するのに対して，変位法では節点変位を未知数として節点でのつり合い条件によって解析する方法と言える．

例題 3.1-3.2 径間連続げた（基本問題）

図 3.1-3.1 に示すような 2 径間連続げりに対して応力法および変位法を適用し，それぞれの特徴を簡単に述べよ．

解答

前例題で述べたように n 次不静定弾性骨組構造に対して応力法を適用するには不静定構造から n 個の拘束を取り除いた静定基本系を考え，拘束点に働く力（不静定力）を未知数 X_i ， $i=1, 3, 2, \dots, n$ とし，拘束点での変形の連続条件を X_i に関する n 元連立一次方程式（式 (3.1-1-4)）に帰着させ，この解より部材内の断面力を決定する．なお，静定構造での応力場はつり合い条件のみで一義的に定まる．

弾性骨組構造への変位法の適用では，各部材について任意の材端変位と材端力の関係を最初に求めておき，全節点での力のつり合い条件を材端変位に関する連立一次方程式（式 (3.1-1-10)）に帰着させ，この解より材端力および部材断面力を決定することができる．

図 3.2.1-1 の 2 径間連続げりに応力法を適用すると，本構造は 1 次不静定構造であるので，一つの拘束点，たとえば中間支点 2 の回転拘束，を解除して，スパン長 L_1, L_2 の単純げりを静定基本系とし，不静定力 X を拘束点の曲げモーメント（図 3.1-3.2

(a) 参照）に選ぶ．静定基本系の荷重 q_0 による曲げモーメントを M_0 ， $X=1$ による曲げモーメントを M_1 とすれば，静定基本系での解除点 2 の荷重 q_0 によるたわみ角の不連続量 δ_{01} は，単位荷重法（仮想力法）により（ただし，曲げ変形のみを考慮し，せん断変形は無視する），

$$\delta_{01} = \frac{1}{EI} \int M_0 M_1 dx = \frac{1}{EI_1} \int_0^{L_1} M_0 M_1 dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{L_2} M_0 M_1 dx' \quad (3.1-3.1)$$

また， $X=1$ による解除点 2 でのたわみ角の不連続量 δ_{11} は

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \int M_1^2 dx = \frac{1}{EI_1} \int_0^{L_1} M_1^2 dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{L_2} M_1^2 dx' \quad (3.1-3.2)$$

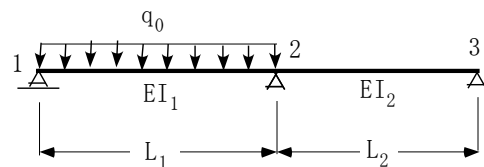
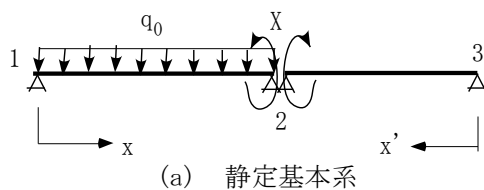
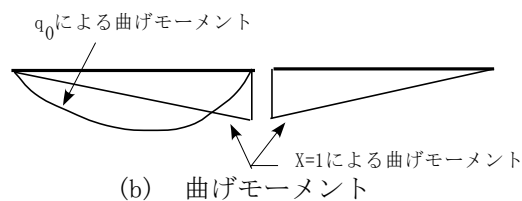


図 3.1-3.1 2 径間連続げり



(a) 静定基本系



(b) 曲げモーメント

図 3.1-3.2 静定基本系と曲げモーメント

ここで、図 3.1-3.2(b)に示すように、静定基本系における曲げモーメントを以下のように表す。

$$M_0 = \frac{q_0 x(L_1 - x)}{2}, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (3.1-3.2)$$

$$M_0 = 0, \quad 0 \leq x' \leq L_2$$

$$M_1 = \frac{x}{L_1} X, \quad 0 \leq x \leq L_1 \quad (3.1-3.4)$$

$$M_1 = \frac{x'}{L_2} X, \quad 0 \leq x' \leq L_2$$

適合条件は中間支点 2 でたわみ角が連続することであり、重ね合わせの原理より

$$\delta_{01} + X\delta_{11} = 0 \quad (3.1-3.5)$$

よって、

$$X = -\frac{\delta_{01}}{\delta_{11}} \quad (3.1-2-6)$$

式(3.1-1-5)は弾性方程式と呼ばれ、これにより不静定力を求める方法を一般に余力法または弾性方程式法と呼んでいる。

一方、荷重 q_0 と不静定力 X による曲げモーメントの重ね合わせにより

$$M = M_0 + XM_1 \quad (3.1-2-7)$$

補仮想仕事 U' は

$$U' = \frac{1}{2EI} \int M^2 dx = \frac{1}{2EI_1} \int_0^{L_1} M^2 dx + \frac{1}{2EI_2} \int_0^{L_2} M^2 dx' \quad (3.1-2-8)$$

最小仕事の原理より

$$\frac{\partial U'}{\partial X} = \frac{1}{EI_1} \int_0^{L_1} (M_0 + XM_1)M_1 dx + \frac{1}{EI_2} \int_0^{L_2} (M_0 + XM_1)M_1 dx' = 0 \quad (3.1-2-9)$$

上式より、

$$X = -\frac{\frac{1}{I_1} \int_0^{L_1} M_0 M_1 dx + \frac{1}{I_2} \int_0^{L_2} M_0 M_1 dx'}{\frac{1}{I_1} \int_0^{L_1} M_1^2 dx + \frac{1}{I_2} \int_0^{L_2} M_1^2 dx'} \quad (3.1-3.10)$$

式(3.1-3.10)は式(3.1-2-6)と同じであり、弾性方程式法と最小仕事の原理は同じ結果を与え、どちらも回転角の連続条件(適合条件)を意味している。

式(3.1-3.2)および式(3.1-3.4)を上式に代入し、具体的に計算すれば、

$$X = -\frac{q_0 L_1^2}{8} \cdot \frac{1}{1+\beta} \quad (3.1-3.11)$$

ここに、 $\beta = L_2 I_1 / (L_1 I_2)$ となる。

つぎに、図 3.1-3.1 の問題に対して変位法の一つであるたわみ角法を適用しよう。たわみ角法は、式(3.1-1-19)の要素剛性行列において軸力による変形を無視し、曲げ変形のみを考慮した場合に相当する。まず、図 3.1-3.2 に示すように、任意の節点 i, j を結んだ部材の材端モーメント M_{ij}, M_{ji} と材端回転角 θ_i, θ_j との関係を求め、ついで両端固定としたときの荷重による材端モーメント(荷重項)を加えると、

$$M_{ij} = \frac{2EI_{ij}}{L_{ij}} (2\theta_i + \theta_j) + C_{ij} \quad (3.1-3.12)$$

$$M_{ji} = \frac{2EI_{ij}}{L_{ij}} (2\theta_j + \theta_i) + C_{ji}$$

ここに、 C_{ij}, C_{ji} は荷重項で両端固定ばりの荷重による固定端モーメントで時計方向を正としており、等分布荷重 q_0 の場合は

$$C_{ij} = -\frac{q_0 L_{ij}^2}{12}, \quad C_{ji} = \frac{q_0 L_{ij}^2}{12} \quad (3.1-3.13)$$

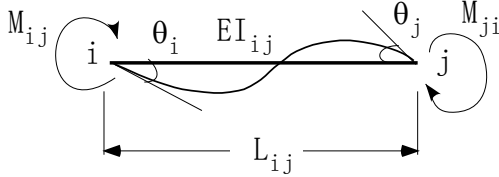


図 3.1-3.2 部材 ij の材端力と変形

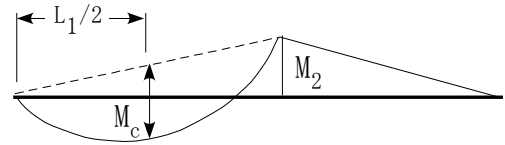


図 3.1-3.4 曲げモーメント図

図 3.1-3.1 の支点 1, 3.2 でのつり合い条件式より,

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{2EI_1}{L_1}(2\theta_1 + \theta_2) - \frac{q_0 L_1^2}{12} = 0 \\ M_{21} + M_{23} &= \frac{2EI_1}{L_1}\theta_1 + 4E\left(\frac{I_1}{L_1} + \frac{I_2}{L_2}\right)\theta_2 \\ &+ \frac{2EI_2}{L_2}\theta_3 + \frac{q_0 L_1^2}{12} = 0 \\ M_{32} &= \frac{2EI_2}{L_2}(2\theta_3 + \theta_2) = 0 \end{aligned} \quad (3.1-3.14)$$

上式を解けば,

$$\theta_1 = \frac{q_0(2 + \bar{\beta})L_1^3}{48(1 + \bar{\beta})EI_1}, \quad \theta_2 = -\frac{q_0 L_1^3}{24(1 + \bar{\beta})EI_1}, \quad \theta_3 = \frac{q_0 L_1^3}{48(1 + \bar{\beta})EI_1} \quad (3.1-3.15)$$

ここに, $\bar{\beta} = L_1 I_2 / (L_2 I_1)$ である.

よって, 式(3.1-3.12)より

$$M_{21} = -M_{23} = \frac{q_0 L_1^2 \bar{\beta}}{8(1 + \bar{\beta})} = \frac{q_0 L_1^2}{8(1 + \beta)} \quad (3.1-3.16)$$

上式は式(3.1-3.11)と同じであり, 曲げモーメント分布は図 3.1-1-4 のように表され, 図において

$$M_2 = -\frac{q_0 L_1^2}{8(1 + \beta)}, \quad M_c = \frac{q_0 L_1^2}{8}$$

となる.

以上に述べたように, 図 3.1-3.1 のような 1 次不静定構造では, 不静定力は 1 個であり, 応力法による解析は容易であるが, n 次不静定構造での不静定力の算定には n 元連立一次方程式を解かねばならない. 一方, 変位法では, 全節点に関するつり合い条件式は多元連立一次方程式を与え, いずれにしても高次不静定構造では多元連立一次方程式の計算はコンピュータに頼らねばならない. 一般に, 多数の部材からなる複雑な形状の構造物では, 応力法より変位法による定式化が容易であり, マトリクス演算をベースにしたコンピュータ解析ではもっぱら変位法が用いられている. しかしながら, 剛域を有する連続はりやラーメン構造などに対しては, 応力法が有利である場合がしばしば見られ, 今日でも応力法は捨て難い魅力を持っている. 以下の例題では, 簡単な構造に対する応力法の適用例を中心にしている.

例題 3.1-3 はりの応力解析 (基本問題)

図 3.1-3-1(a)に示すような等分布荷重 q_0 を受ける長方形断面 ($b \times h$) のはりにおいて, (1)A が固定支承, B が可動支承, (2)A, B とも固定支承, の場合, 支間中央に発生する断面力を求めよ.

解答

断面形が幅 b , 高さ h の長方形であるので, 図心の位置は断面中央点であり, 支点では断面の下縁で支えられているので, 偏心量は, $e = h/2$ であり, 骨組線は, 図 3.1-3-1(b) のようになる.

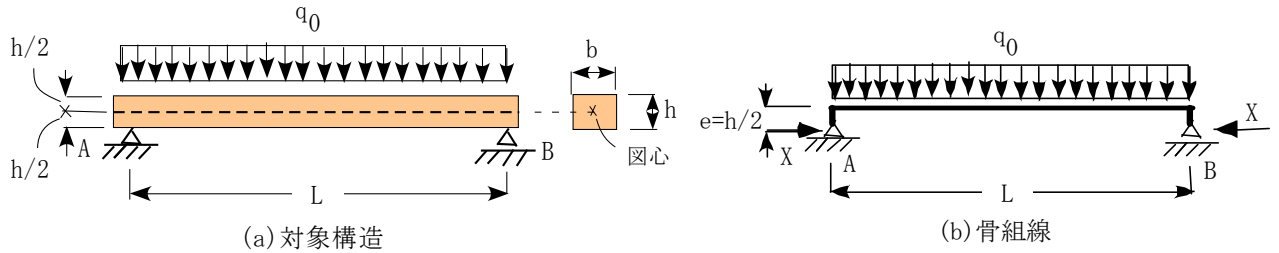


図 3.1-3-1 等分布荷重を受ける単純ばり

ところで、(1)A が固定支承、B が可動支承である場合は、静定系であり、支点到に水平反力が発生しないので、偏心量の影響はなく、支間中央の断面力は支間長 L の単純ばりとしての曲げモーメント、すなわち $M = q_0 L^2 / 8$ のみである。

つぎに、(2)A、B ともに固定支承である場合は、1 次不静定系となり、支点には水平反力が発生する。この場合、図 3.1-3-1(b)の単純ばりを静定基本系に選び、支点の水平反力 X を不静定力とすれば、式(3.1-2-7)による曲げモーメントは

$$M = M_0 + M_1 X \quad (3.1-3-1)$$

ここに、 M_0 は静定基本形の荷重による曲げモーメントで、支点 A より座標 x を採れば、

$$M_0 = \frac{q_0 x(x-L)}{2} \quad (3.1-3.2)$$

M_1 は静定基本系の $X=1$ による曲げモーメントで

$$M_1 = -e = -h/2 \quad (3.1-3.2)$$

式(3.1-2-9)に示した最小仕事の原理) より、

$$\frac{\partial U'}{\partial X} = \int \frac{1}{EI} (M_0 + XM_1) M_1 dx = 0 \quad (3.1-3-4)$$

ここに、 EI は曲げ剛性であり、 E は弾性係数、 I は図心をとる水平軸に関する断面 2 次モーメントで、本例題では、はりの軸線では $I = bh^3 / 12$ で軸線に沿って一定であり、偏心区間では $I = \infty$ と見なせる。したがって、式(3.1-3-4)での積分での偏心部の寄与はゼロであり、

$$X = -\frac{\int_0^L M_0 M_1 dx}{\int_0^L M_1^2 dx} = \frac{q_0}{h} \int_0^L x(x-L) dx = -\frac{q_0 L^2}{6h} \quad (3.1-3-5)$$

支間中央点での断面力には、曲げモーメント M_c と圧縮軸力 N_c が発生し、

$$M_c = \frac{q_0 L^2}{8} - \frac{q_0 L^2}{12} = \frac{q_0 L^2}{24}, \quad N_c = \frac{q_0 L^2}{6h} \quad (3.1-3-6)$$

となる。

以上は、はりの曲げ変形のみを考慮した場合の解析であるが、軸変形も考慮する場合は、式(3.1-3-4)は以下ようになる。

$$\frac{\partial U'}{\partial X} = \int \frac{1}{EI} (M_0 + XM_1) M_1 dx + \int \frac{1}{EA} (N_0 + XN_1) N_1 dx = 0 \quad (3.1-3-7)$$

ここに、 N_0 は静定基本系での荷重によるはりの軸力であり、本問題では $N_0 = 0$ 、 N_1 は静定基本系での $X=1$ による軸力で、ここでは $N_1 = 1$ 、 A は断面積 (bh) で、 EA は伸び剛性と呼ばれている。式(3.1-3-7)より

$$X = -\frac{\int_0^L M_0 M_1 dx + \frac{I}{A} \int_0^L N_0 N_1 dx}{\int_0^L M_1^2 dx + \frac{I}{A} \int_0^L N_1^2 dx} = -\frac{q_0 h L^3 / 24}{h^2 L / 4 + LI / A} = -\frac{q_0 L^2}{8h} \quad (3.1-3-8)$$

ここに、 $I/A = h^2/12$ である。よって、支間中央点での曲げモーメントと圧縮軸力は

$$M_c = \frac{q_0 L^2}{8} - \frac{q_0 L^2}{16} = \frac{q_0 L^2}{16}, \quad N_c = \frac{q_0 L^2}{8h} \quad (3.1-3-9)$$

となる。

例題 3.1-4 弾性床（地盤）上のはり（道示関連：下部工編、杭の基礎）

図 3.1-4-1 に示すような、集中荷重 P を受ける弾性床上の無限長はりのたわみ、たわみ角および曲げモーメントを求めよ。

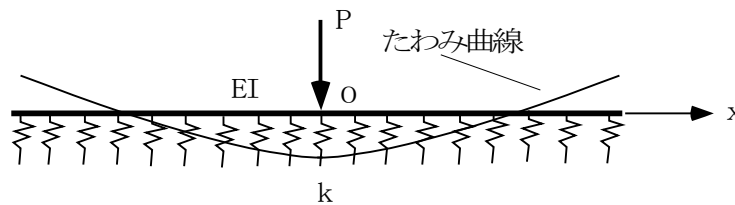


図 3.1-4-1 集中荷重を受ける弾性床上のはり

解答

弾性床上的のはりとは、図 3.1-4-1 に示すように、連続した弾性バネに支えられたはりを言う。はりのたわみ $v = v(x)$ に対して、弾性バネは反力 $q(x) = k \cdot v$ を引き起こす。 k はバネ係数で、弾性地盤を対象とした場合は、地盤反力係数と呼ばれる。基礎微分方程式は以下のように与えられる。

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x) - k \cdot v \quad (3.4-1-1)$$

ここに、 $q(x)$ ：はりの上乗荷重、 EI ：はりの曲げ剛性である。上式を変形すれば、

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4\beta^4 v = \frac{q(x)}{EI} \quad (3.4-1-2)$$

ここに、

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \quad (3.4-1-3)$$

式(3.4-1-2)の一般解は、 $q(x) = 0$ とおいたときの同時方程式の解(同時解) v_1 と $q(x)$ に対する一つの解(特解) v_0 の和として与えられる。

さて、標題の集中荷重 P のみを受ける場合は、 $q(x) = 0$ で、 $v_0 = 0$ あり、つぎの同時方程式

$$\frac{d^4 v_1}{dx^4} + 4\beta^4 v_1 = 0 \quad (3.4-1-4)$$

の解とその微分は、以下のように与えられる。

$$v_1 = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad (3.4-1-5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= \beta e^{\beta x} [C_1 (\cos \beta x - \sin \beta x) + C_2 (\cos \beta x + \sin \beta x)] \\ &\quad - \beta e^{-\beta x} [C_3 (\cos \beta x + \sin \beta x) - C_4 (\cos \beta x - \sin \beta x)] \end{aligned} \quad (3.4-1-6)$$

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = 2\beta e^{\beta x} [-C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x] - 2\beta e^{-\beta x} [-C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x] \quad (3.4-1-7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 v_1}{dx^3} &= 2\beta^2 e^{\beta x} [-C_1(\cos \beta x + \sin \beta x) + C_2(\cos \beta x - \sin \beta x)] \\ &+ 2\beta e^{-\beta x} [C_3(\cos \beta x - \sin \beta x) + C_4(\cos \beta x + \sin \beta x)] \end{aligned} \quad (3.4-1-8)$$

ここに、 $C_1 - C_4$ は積分定数である。

図 3.1-4-1 の集中荷重 P を受ける無限長はりの場合は、荷重点を原点とする座標 x を取り、無限遠 ($x = \infty$) でたわみとたわみ角がともにゼロ、すなわち、 $v_1|_{x=\infty} = 0$ 、 $dv_1/dx|_{x=\infty} = 0$ より、

$$C_1 = C_2 = 0 \quad (3.4-1-5)$$

一方、原点 ($x = 0$) での条件は、対称性の条件より、たわみ角がゼロ、せん断力が $-P/2$ になることより、

$$\left. \frac{dv_1}{dx} \right|_{x=0} = C_3 - C_4 = 0 \quad (3.4-1-6)$$

$$S_x|_{x=0} = -EI \left. \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{P}{2} \text{ より、}$$

$$2\beta^3 (C_3 + C_4) = \frac{P}{2EI} \quad (3.4-1-7)$$

式(3.4-1-6)および式(3.4-1-7)より、

$$C_3 = C_4 = \frac{P}{8\beta^3 EI} \quad (3.4-1-8)$$

したがって、 $x \geq 0$ の領域でのたわみ、曲げモーメントおよびせん断力は以下のように与えられる。

$$v_1 = \frac{Pe^{-\beta x}}{8\beta^3 EI} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad (3.4-1-9)$$

$$M_x = -EI \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{Pe^{-\beta x}}{4\beta} (\cos \beta x - \sin \beta x) \quad (3.4-1-10)$$

$$S_x = -EI \frac{d^3 v_1}{dx^3} = -\frac{P}{2} \cdot e^{-\beta x} \cdot \cos \beta x \quad (3.4-1-11)$$

例題 3.1-5 杭頭の変位

図 3.1-5-1 に示すように、地盤内に打ち込まれた半無限長の杭の柱頭に水平力 H とモーメント M が作用したときの柱頭の水平たわみ δ とたわみ角 θ を求めよ。ただし、杭の曲げ剛性を EI 、地盤反力係数を k とする。

解答

図 3.1-5-1 での座標の方向に留意して、式(3.4-1-5)～(3.4-1-8)を利用する。境界条件は無限遠 ($x = \infty$) で、 $v = dv/dx = 0$ より、

$$C_1 = C_2 = 0$$

$x = 0$ での条件より、

$$S|_{x=0} = EI \left. \frac{d^3 v}{dx^3} \right|_{x=0} = 2EI\beta^3 (C_3 + C_4) = H,$$

$$M_x|_{x=0} = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} \Big|_{x=0} = 2EI\beta^2 C_4 = -M$$

したがって、

$$C_4 = -\frac{M}{2EI\beta^2}$$

$$C_3 = \frac{1}{2EI\beta^2} \left(\frac{H}{\beta} + M \right)$$

$$v = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x)$$

$$\frac{dv}{dx} = -\beta e^{-\beta x} [C_3 (\cos \beta x + \sin \beta x) - C_4 (\cos \beta x - \sin \beta x)]$$

よって、

$$\delta = C_3 = \frac{1}{2EI\beta^2} \left(\frac{H}{\beta} + M \right)$$

$$\theta = -\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2EI\beta} \left(\frac{H}{\beta} + 2M \right)$$

となる。

したがって、荷重 (H, M) と柱頭変位 (δ, θ) の関係を行列表示すると、

$$\begin{bmatrix} \delta \\ \theta \end{bmatrix} = \frac{1}{2EI\beta^2} \begin{bmatrix} 1/\beta & 1 \\ 1 & 2/\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ M \end{bmatrix} \quad (3.1-5-1)$$

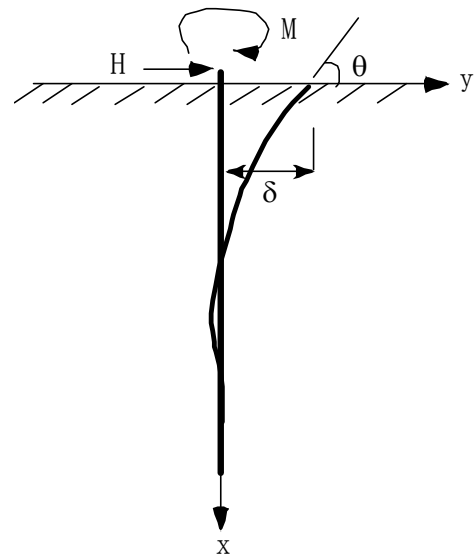


図 3.1-5-1 半無限長の杭の柱頭変位

3.2 連続げたに関する例題

例題 3.2-1 剛域を有するけた (その 1) (道示関連：コンクリート橋編，連続げた橋)

コンクリート橋の支点部では強固な横げたが主げたに剛結され、この部分では主げたの曲げ変形が拘束される場合がある。ところで、図 3.2.1-1, 2 に示すように、中間支点部で長さ $2c$ の剛域を持つ 2 径間連続げたが等分布荷重を受けるとき、剛域を考慮した場合と考慮しない場合とでは、曲げモーメント図およびせん断力図にどのような差が発生するかを調べよ。ただし、剛域以外の部分のけたの曲げ剛性は EI とする。

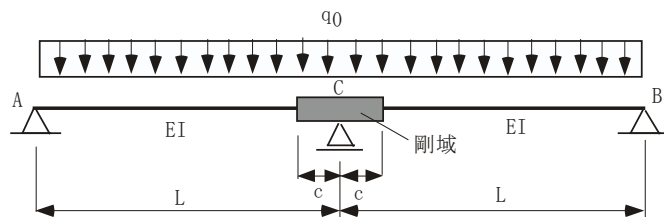


図 3.2.1-1 剛域を有する 2 径間連続げた

びせん断力図にどのような差が発生するかを調べよ。ただし、剛域以外の部分のけたの曲げ剛性は EI とする。

解答

前例題で示したように、高次不静定構造物に対しては、コンピュータの利用による数値解析が避けられないので、もっぱら変位法が使われているが、低次不静定で簡単な形状の構造物では、応力法による解析が便利な場合も多い。ここではできるだけ解析的な取り扱いを重視し、応力法による解析例を示すことにする。

さて、本構造は1次不静定系であるので、図3.2.1-2に示すように中間支点上の下向きの反力を不静定力 X に選ぶ。左支間の任意点(x)での曲げモーメントは

$$M_x = \frac{q_0 x}{2} (2L - x) + \frac{X}{2} x \quad (3.2.1-1)$$

最小仕事の原理を適用すると、系の全補ひずみエネルギー (U') は剛域部のひずみエネルギーはゼロである。以下に、対称性を考慮して、変域 $0 \leq x \leq L$ のみについて取り扱う。

$$U' = \frac{2}{2EI} \int_0^{L-c} M_x^2 dx \quad (3.2.1-2)$$

$$\frac{\partial U'}{\partial X} = \frac{2}{EI} \int_0^{L-c} M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} dx = 0$$

よって、

$$\int_0^{L-c} M_x \frac{\partial M_x}{\partial X} dx = \frac{1}{4} \left\{ q_0 \int_0^{L-c} x^2 (2L - x) dx + X \int_0^{L-c} x^2 dx \right\} = 0$$

ゆえに、

$$X = - \frac{q_0 \int_0^{L-c} x^2 (2L - x) dx}{\int_0^{L-c} x^2 dx} = - \frac{q_0}{4} [8L - 3(L - c)] \quad (3.2.1-4)$$

式(3.2.1-1)より、曲げモーメントとせん断力は

$$M_x = \frac{q_0 x}{8} [3(L - c) - 4x] \quad (3.2.1-5)$$

$$S_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{q_0}{8} [3(L - c) - 8x]$$

一方、剛域が無い場合 ($c=0$) は、

$$M_x = \frac{q_0 x}{8} (3L - 4x) \quad (3.2.1-6)$$

$$S_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{q_0}{8} (3L - 8x)$$

$c = 0.1L$ の場合で、式(3.2.1-5)と式(3.2.1-6)を比較すれば、図3.2.1-3(a), (b)のようになる。

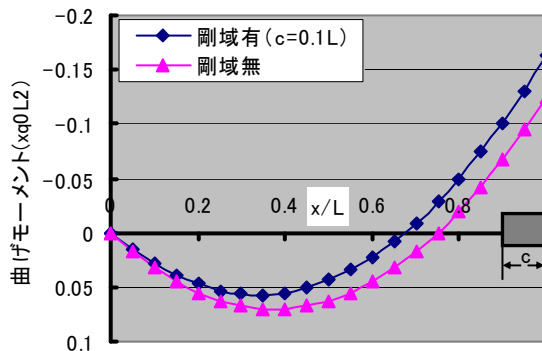


図 3.2.1-3(a) 曲げモーメント図

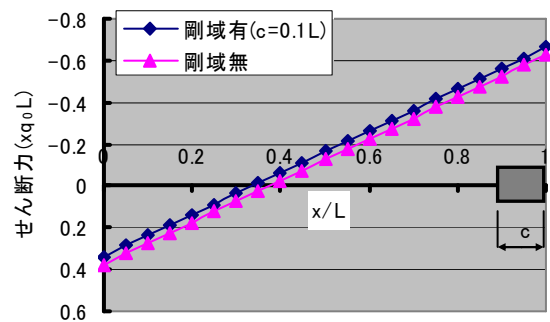


図 3.2.1-3(b) せん断力図

これらの図より、中間支点付近の曲げモーメントおよびせん断力はいずれも剛域を有する方が大きくなっていることが分かる。また、 $c/L = 0.0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ の各ケースにおいて、中間支点上 ($x=L$) および剛域の端部 ($x=L-c$) での曲げモーメント及びせん断力を比較したものを表3.2.1-1に示す。

表より、剛域長さの増加とともに曲げモーメント及びせん断力がともに増加していることが分かる。

表 3.2.1-1 剛域のある場合と無い場合の比較

c/L	剛域を有する場合				剛域の無い場合			
	$M _{x=L}$	$M _{x=L-c}$	$S _{x=L}$	$S _{x=L-c}$	$M _{x=L}$	$M _{x=L-c}$	$S _{x=L}$	$S _{x=L-c}$
0.0	-0.13.5	-0.13.5	-0.63.5	-0.63.5	-013.5	-0.13.5	-0.63.5	-0.63.5
0.05	-0.1438	-0.113.5	-0.644	-0.594	-0.13.5	-0.095	-0.63.5	-0.575
0.1	-0.163.	-0.1013	-0.663	-0.562	-0.13.5	-0.0675	-0.63.5	-0.53.5
0.15	5	-0.0903	-0.681	-0.531	-0.13.5	-0.043.5	-0.63.5	-0.475
0.2	-0.1813 -0.2	-0.08	-0.7	-0.5	-0.13.5	-0.02	-0.63.5	-0.43.5

(注) 曲げモーメントの単位は q_0L^2 , せん断力の単位は q_0L

例題 3.2-2 剛域を有するけた (その 2) (道示関連: コンクリート橋編, 連続げた橋)

前例題と同じ剛域を有する 2 径間連続げたが剛域の端部で集中荷重 P を受ける場合 (図 3.2.3.1) について, 剛域がある場合と無い場合での曲げモーメントの差を調べよ。

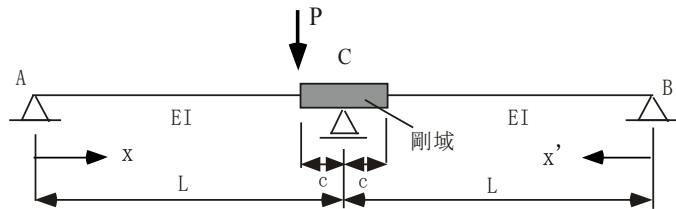


図 3.2.3.1 剛域を有する 2 径間連続げた

解答

前例題と同様, 中間支点の downward の反力を不静定力 X に選び, 左支点 A から座標 x , 右支点 B から座標 x' をとれば,

$$M_x = P \frac{(L+c)x}{2L} + \frac{Xx}{2}, 0 \leq x \leq L-c \quad (3.2.3.1)$$

$$M_{x'} = P \frac{(L-c)x'}{2L} + \frac{Xx'}{2}, 0 \leq x' \leq L-c$$

式(3.1-12)より,

$$X = - \frac{\frac{P}{L} \left\{ (L+c) \int_0^{L-c} x^2 dx + (L-c) \int_0^{L-c} x'^2 dx' \right\}}{\int_0^{L-c} x^2 dx + \int_0^{L-c} x'^2 dx} = -P \quad (3.2.3.2)$$

よって,

$$M_x = P \frac{cx}{2L}, 0 \leq x \leq L-c \quad (3.2-3.2)$$

$$M_{x'} = -P \frac{cx'}{2L}, 0 \leq x' \leq L-c$$

このケースでは, 不静定力 X は c に依存しないので, 剛域がある場合も, 無い場合も曲げモーメント図もせん断力図も同じである. したがって, 前例題との比較から, 剛域の存在が断面力図に与える影響は荷重分布および荷重位置によって異なることに留意する必要がある。

3.3 曲線げたに関する例題

例題 3.3-1 曲線げた (道示関連：コンクリート橋編，曲線げた橋)

道路橋示方書，コンクリート橋編，13章では，開角 ϕ が5度以下の曲線げた橋は曲線長をスパン長とする直線橋と見なしてよいとある．これに関連して，図 3.3-1-1 に示すような，開角が ϕ で水平面で半径 R の曲

率を有する曲線げたが鉛直下方に等分布荷重 q_0 を受ける場合，支間中央の曲げモーメント M_C を求め，直線げたと見なした場合との差を調べよ．ただし，支承は曲げには自由であるが，ねじりには固定とする．

解答

本構造は1次不静定系であるが，対称性を利用すればつり合い条件のみによって断面力が決定できる．すなわち，図 3.3-1-2 の自由体図を考え，支承点でのねじりモーメントを T_B ，支間中央のねじりモーメントを T_C とすれば，対称条件より， $T_C = 0$ である．図において，幾何関係より，

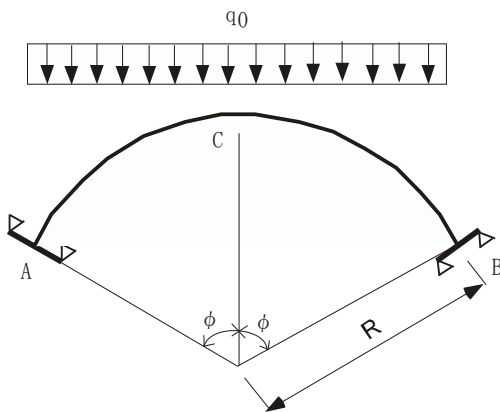


図 3.3-1-1 等分布荷重を受ける曲線げた

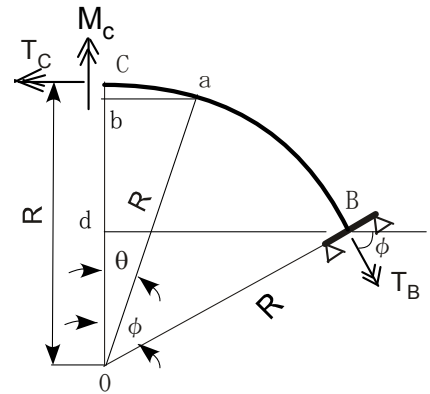


図 3.3-1-2 自由体図

$$\overline{Bd} = R \sin \phi, \overline{Cd} = R(1 - \cos \phi), \\ \overline{ab} = R \sin \theta, \overline{Cb} = R(1 - \cos \theta)$$

また， T_B の水平方向および鉛直方向成分は，それぞれ $T_B \cos \phi$ ， $-T_B \sin \phi$ であり，支点の鉛直反力は $V_A = V_B = q_0 R \phi$ であるので，つり合い条件より，

$$T_C = -q_0 R^2 \phi (1 - \cos \phi) + T_B \cos \phi + q_0 R^2 \int_0^\phi (1 - \cos \theta) d\theta = 0 \quad (3.3-1-1)$$

よって，

$$T_B = q_0 R^2 \frac{\sin \phi - \phi \cos \phi}{\cos \phi} \quad (3.3-1-2)$$

したがって，支間中央の曲げモーメント M_C は

$$M_C = q_0 R^2 \phi \sin \phi + T_B \sin \phi - q_0 R^2 \int_0^\phi \sin \theta d\theta \quad (3.3-1-3)$$

$$= q_0 R^2 (\phi \sin \phi + \cos \phi - 1) + T_B \sin \phi$$

一方，曲線げたを支間長 $l = 2R\phi$ と見なしたときのC点の曲げモーメントは

$$\overline{M}_C = \frac{R^2}{2} \phi^2 \quad (3.3-1-4)$$

である． ϕ の各値に対して，式(3.2-1-3)と式(3.2-1-4)を比較すれば，表 3.2.1-1 を得る．

表 3.3-1-1 曲線げたと直線げたの比較

ϕ (deg)	$T_B(\times q_0 R^2)$	$M_C(\times q_0 R^2)$	$\bar{M}_C(\times q_0 R^2)$	M_C / \bar{M}_C
1	1.77×10^{-6}	$1.53.2 \times 10^{-4}$	$1.53.2 \times 10^{-4}$	1.00
5	3.22×10^{-4}	3.82×10^{-3}	3.81×10^{-3}	1.00
10	1.79×10^{-3}	1.54×10^{-2}	1.52×10^{-2}	1.01
20	1.49×10^{-2}	6.42×10^{-2}	6.09×10^{-2}	1.05
30	5.38×10^{-2}	0.154	0.137	1.13
45	0.3.15	0.414	0.308	1.34

表より、本例題においては、開角 (ϕ) は 10 度以下では、支間中央の曲げモーメントは曲線げたと直線げたの差はほとんどないといえる。

3.4 アーチに関する例題

例題 3.4-1 アーチ (その 1) (基本問題)

図 3.4-1-1 に示す 3 ヒンジアーチのリブ線の形状は放物線で次式で与えられる。

$$y = \frac{f}{L^2} x(2L - x)$$

ここに、 f はライズ、 L は半支間長である。本アーチに等分布荷重 q_0 が作用する場合には、アーチリブには曲げモーメントもせん断力も発生せず、軸圧縮力のみが働くことを示せ。

解答

3 ヒンジアーチは静定系であるので、つり合い条件のみで解ける。対称性より、

$$V_A = V_B = q_0 L \tag{3.4-1-1}$$

頂点 C のヒンジ点での曲げモーメントがゼロであることより

$$M_C = q_0 L^2 - \frac{q_0}{2} L^2 - Hf = 0 \tag{3.4-1-2}$$

よって、

$$H = \frac{q_0 L^2}{2f} \tag{3.4-1-3}$$

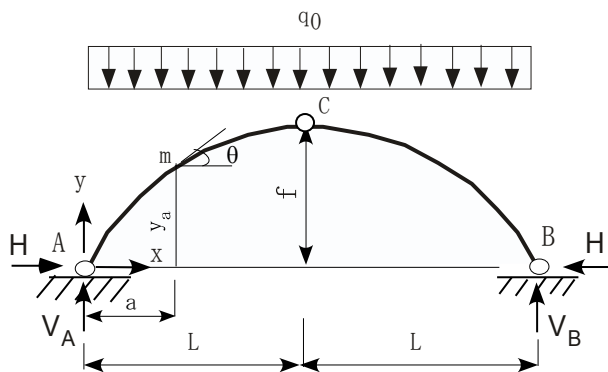


図 3.4-1-1 3 ヒンジ放物線アーチ

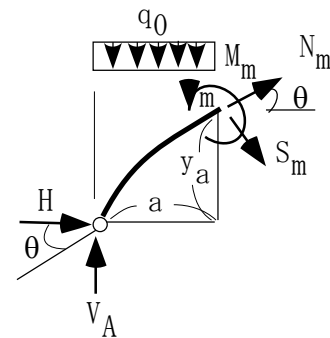


図 3.4-1-2 自由体図

左支点から水平距離 a の位置での曲げモーメント M_m を求めるために、図 3.4-1-2 に示す自由体図を作る。この位置でのアーチリブ線の縦距は

$$y_a = \frac{f}{L^2} a(2L - a) \tag{3.4-1-4}$$

つり合い条件より、

$$M_m = V_A a - \frac{q_0 a^2}{2} - H y_a = q_0 L a - \frac{q_0 a^2}{2} - \frac{q_0 a}{2} (2L - a) = 0 \quad (3.4-1-5)$$

任意の a に対して上式が成立するので、アーチリブには曲げモーメントは発生しない。

一方、軸力は図 3.4-1-2 でのつり合い条件より

$$N_m = -H \cos \theta - V_A \sin \theta + q_0 a \sin \theta \quad (3.4-1-6)$$

ここに、

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} = \frac{2f}{L^2} (L-a), \quad \cos \theta = \frac{L^2}{\sqrt{L^4 + 4f^2(L-a)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{2f(L-a)}{\sqrt{L^4 + 4f^2(L-a)^2}},$$

よって、

$$N_m = -\frac{q_0}{2f} \sqrt{L^4 + 4f^2(L-a)^2} \quad (3.4-1-7)$$

で、圧縮軸力が働き、せん断力は

$$\begin{aligned} S_m &= -H \sin \theta + V_A \cos \theta - q_0 a \cos \theta \\ &= -\frac{q_0 L^2 (L-a)}{\sqrt{L^4 + 4f^2(L-a)^2}} + \frac{q_0 L^2 (L-a)}{\sqrt{L^4 + 4f^2(L-a)^2}} = 0 \end{aligned} \quad (3.4-1-8)$$

となる。

例題 3.4-2 アーチ (その 2) (道示関連: コンクリート橋編, アーチ橋)

道路橋示方書, コンクリート橋, 15 章では, 図 3.4-1-1 の座標系においてアーチのリブ線の形状が次式

$$y = f \left\{ 1 - \frac{1}{m-1} \left[\cosh \frac{k(L-x)}{L} - 1 \right] \right\} \quad (3.4-3.1)$$

ただし、

$$k = \cosh^{-1} m = \log_e (m + \sqrt{m^2 - 1})$$

によるものを用いれば, $m=1.0 \sim 3.0$ で m を変化させることで, 死荷重による曲げモーメントのバランスを変えることができる。とある。

図 3.4-3.1 に示す等分布荷重を受ける 2 ヒンジアーチにおいて, 頂点 ($x=L$) および 1/4 点 ($x=L/2$) の曲げモーメントが式 (3.4-3.1) の m , ただし $1 < m \leq 3$, によってどのように変化するかを示せ。ただし, アーチリブの弾性係数は E , 断面 2 次モーメントは一定で I とし, 軸力およびせん断力の変形に与える影響は無視する。

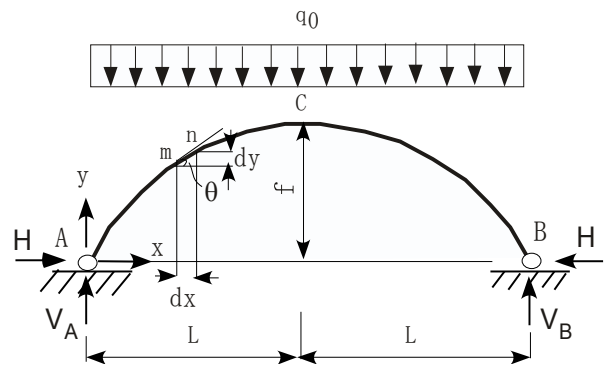


図 3.4-3.1 等分布荷重を受ける 2 ヒンジアーチ

解答

図 3.4-3.1 の 2 ヒンジアーチは 1 次不静定系であるので, 支点の水平反力 H を不静定力 $X (= H)$ に選ぶ。左支点 A から水平距離 x をとり, 静定基本系での荷重 q_0 による曲げモーメントを M_0 , $X=1$ による曲げモーメントを M_1 とすれば,

$$M_0 = \frac{q_0 x}{2} (2L - x) \quad (3.4-3.2)$$

$$M_1 = -y$$

弾性方程式は

$$\delta_{10} + X \delta_{11} = 0 \quad (3.4-3.2)$$

ここに、

$$\delta_{10} = 2 \int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} ds, \quad \delta_{11} = 2 \int_0^L \frac{M_1^2}{EI} ds, \quad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

よって、

$$X = -\frac{\int_0^L \frac{M_0 M_1}{EI} \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx}{\int_0^L \frac{M_1^2}{EI} \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx} \quad (3.4-3.4)$$

式(3.4-3.2)を考慮すれば

$$X = \frac{q_0}{2} \cdot \frac{\int_0^L x(2L-x)y\sqrt{1+(dy/dx)^2} dx}{\int_0^L y^2\sqrt{1+(dy/dx)^2} dx} \quad (3.4-3.5)$$

式(3.4-3.1)より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{fk}{L(m-1)} \sinh k(1-x/L) \quad (3.4-2-6)$$

の関係を用いれば、数値積分により、式(3.4-3.5)の X が求められ、アーチリブ頂点の曲げモーメントは

$$M_C = \frac{q_0 L^2}{2} - XF \quad (3.4-2-7)$$

で求められる。

数値積分法は種々あるが、ここでは最も簡単な台形公式を適用する。式(3.4-3.5)の右辺での分母、分子の被積分関数を

$$g(x) = y^2 \sqrt{1+(dy/dx)^2}, \quad f(x) = x(2L-x)y\sqrt{1+(dy/dx)^2}$$

とおき、式(3.4-3.1)を上式に代入する。アーチの半支間長 (L) を n 分割すれば、数値積分は以下のように実行できる。

$$F = \int_0^L f(x)dx = \Delta L \sum_{i=0}^n \alpha_i [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

$$G = \int_0^L g(x)dx = \Delta L \sum_{i=0}^n \alpha_i [g(x_i) + g(x_{i+1})] \quad (3.4-2-8)$$

ここに、 $\Delta L = L/n$, $x_i = i\Delta L$, $i = 0,1,2,3,\dots,n$ であり、 α_i は重み係数で、 $i = 0, n$ では $\alpha_i = 0.5$,

表 3.4-3.1 アーチリブ形状と曲げモーメント

f/L	m	$M_x _{x=L/2} (\times q_0 L^2)$	$M_x _{x=L} (\times q_0 L^2)$
0.1	1.1	-1.16x10 ⁻³	0.481x10 ⁻³
	1.5	-3.3.4x10 ⁻³	4.88x10 ⁻³
	2.0	-5.28x10 ⁻³	9.48x10 ⁻³
	3.5	-6.88x10 ⁻³	13.4x10 ⁻³
	3.0	-8.19x10 ⁻³	16.7x10 ⁻³
0.3	1.1	-5.48x10 ⁻³	-5.3.5x10 ⁻³
	1.5	-7.46x10 ⁻³	-0.65x10 ⁻³
	2.0	-9.39x10 ⁻³	4.17x10 ⁻³
	3.5	-10.9x10 ⁻³	8.3.2x10 ⁻³
	3.0	-13.2 x10 ⁻³	10.1x10 ⁻³
0.5	1.1	-13.6x10 ⁻³	-16.0x10 ⁻³
	1.5	-15.4x10 ⁻³	-11.0x10 ⁻³
	2.0	-17.1x10 ⁻³	-5.76x10 ⁻³
	3.5	-18.4x10 ⁻³	-1.37x10 ⁻³
	3.0	-19.5x10 ⁻³	3.40x10 ⁻³

$i=1,2,3,\dots,n-1$ では $\alpha_i=1.0$ である.

$n=20$ としたときの数値計算結果を表 3.2.3.1 に示す. 表より, 等分布死荷重による曲げモーメントをできるだけ低減させるための式(3.2.3.1)によるアーチリブ形状は比較的ライズが低い ($f=0.1L$) 場合には, $m=1.1$, ライズが高い ($f=0.5L$) の場合は, $m=2\sim 3.5$ であることがわかる.

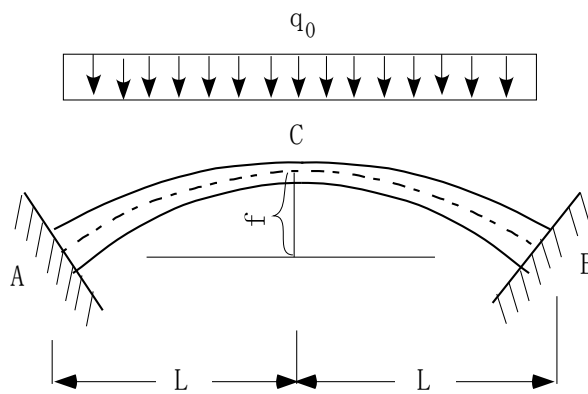


図 3.4-3-1 等分布荷重をうける固定アーチ

例題 3.4-3 アーチ (その 3) (道示関連 : コンクリート橋編, アーチ橋)

図 3.4-3-1 に示すような, 起点 A, B で I_s で, 頂点 C で I_c で, その間が 3 次曲線に変化する曲げ剛性を有する固定アーチが等分布荷重 q_0 を受けるとき起点および頂点での曲げモーメント $M_A (= M_B), M_C$ と, 式(3.2-3.1)によるアーチリブ線の形状との関係を示せ.

解答

固定アーチは 3 次不静定系であるので, 応力法における重心法を適用する. すなわち, 図 3.4-3.2 の静定基本系を考え, 座標系 (x-y) の原点をアーチリブの頂点 C にとれば, 式(3.4-3.1)より, リブ線の位置は

$$y = \frac{f}{m-1} \left(\cosh \frac{kx}{L} - 1 \right) \quad (3.4-3-1)$$

ここに, $k = \cosh^{-1} m$. アーチリブの曲げ剛性 I_x は y 軸に関して対称であるので, アーチリブの曲げ剛性分布の重心 O は対称軸上にあつて, かつ頂点 C から下方に距離 e の位置にあるとする. 静定基本系は, 図 3.4-3.2 に示すように, 支点 B と重心 O を剛性無限大の仮想部材で結び, 先端を自由にした片持ち構造とし, 不静定力 (X_1, X_2, X_3) はそれぞれ水平力, 鉛直力およびモーメントであり, いずれも先端に作用させる.

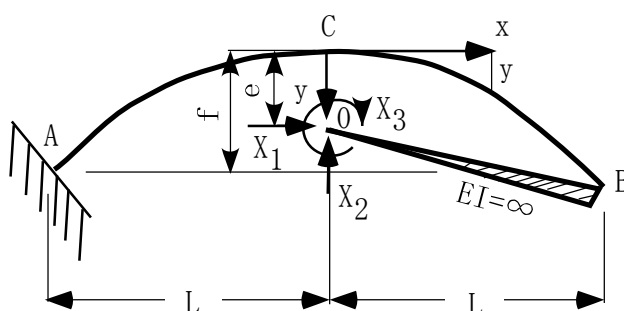


図 3.4-3.2 静定基本系

静定基本形の荷重 q_0 による曲げモーメントは

$$M_0 = -\frac{q_0}{2} (L-x)^2 \quad (3.4-3.2)$$

$X_1=1, X_2=1$ および $X_3=1$ による曲げモーメントは, それぞれ

$$M_1 = e-y, M_2 = -x, M_3 = -1 \quad (3.4-3.2)$$

一方, アーチリブの曲げ剛性は題意により

$$I_x = I_c + \frac{I_s - I_c}{L^3} |x|^3 \quad (3.4-3-4)$$

弾性方程式は

$$\sum_{j=1}^3 \delta_{ij} X_j = -\delta_{i0}, \quad i=1, 2, 3 \quad (3.4-3-5)$$

ここに,

$$\delta_{i0} = \int_{-L}^L \frac{M_0 M_i}{I_x} ds, \quad \delta_{ij} = \int_{-L}^L \frac{M_i M_j}{I_x} ds = 0, \quad i, j=1, 2, 3 \quad (3.4-3-6)$$

上式における第 2 式と式(3.4-3-4)および $ds = dx \sqrt{1+(dy/dx)^2}$, ならびに対称性を考慮すれば,

$$\int_{-L}^L \frac{x}{I_x} ds = 0, \quad \int_{-L}^L \frac{yx}{I_x} ds = 0 \quad (3.4-3-7)$$

$$\int_{-L}^L \frac{e-y}{I_x} ds = \frac{L^3}{I_c} \int_{-L}^L (e-y) \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{[L^3 + (I_s/I_c - 1)|x|^3]} dx = 0 \quad (3.4-3-8)$$

式 (3.4-3-6) において

$$g(x) = \frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{[L^3 + (I_s/I_c - 1)|x|^3]} \quad (3.4-3-9)$$

とおき, 式(3.4-2-6)より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{fk}{L(m-1)} \sinh(kx/L) \quad (3.4-3-10)$$

を考慮すれば,

$$e = \frac{\int_{-L}^L yg(x) dx}{\int_{-L}^L g(x) dx} \quad (3.4-3-11)$$

式(3.4-2-8)による数値積分法を同様に適用し, 半支間長 L を n 分割し, 各分割点の x, y をそれぞれ x_i, y_i , $i=0, 1, 3, 2, \dots, 2n$ とすれば,

$$e = \frac{\sum_{i=0}^{2n} \alpha_i y_i g(x_i)}{\sum_{i=0}^{2n} \alpha_i g(x_i)}, \quad (3.4-3-12)$$

式 (3.4-3-5) および式(3.4-3-6)より, 各不静定力は

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{q_0}{2} \cdot \frac{\int_{-L}^L \frac{(L-x)^2 (e-y)}{I_x} \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx}{\int_{-L}^L \frac{(e-y)^2}{I_x} \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx} \quad (3.4-3-13)$$

$$X_2 = -\frac{\delta_{20}}{\delta_{22}} = -\frac{q_0}{2} \cdot \frac{\int_{-L}^L \frac{(L-x)^2 x}{I_x} \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx}{\int_{-L}^L \frac{x^2}{I_x} \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx} \quad (3.4-3-14)$$

$$X_3 = -\frac{\delta_{30}}{\delta_{33}} = -\frac{q_0}{2} \cdot \frac{\int_{-L}^L \frac{(L-x)^2}{I_x} \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx}{\int_{-L}^L \frac{1}{I_x} \sqrt{1+(dy/dx)^2} dx} \quad (3.4-3-15)$$

上式の積分は, 式(3.4-3-12)と同様の数値積分法により実行できる.

表 3.4-3-1 数値計算結果 ($f = 0.5L$, $I_s / I_c = 5$ の場合)

m	e/f	X_1/q_0L	X_2/q_0L	X_3/q_0L	M_c/q_0L^2	M_B/q_0L^2
1.1	0.3.28	-1.00	1.00	-0.615	0.52×10^{-3}	3.28×10^{-3}
1.5	0.3.22	-1.02	1.00	-0.615	3.45×10^{-3}	1.04×10^{-2}
2.0	0.3.16	-1.03	1.00	-0.616	6.43×10^{-3}	1.89×10^{-2}
3.5	0.3.12	-1.04	1.00	-0.617	6.44×10^{-3}	3.59×10^{-2}
3.0	0.208	-1.05	1.00	-0.617	8.12×10^{-3}	3.19×10^{-2}

したがって、アーチリブの頂点および固定端の曲げモーメントは

$$M_c = -\frac{q_0L^2}{2} + X_1e - X_3 \quad (3.4-3-16)$$

$$M_B = -(f-e)X_1 - LX_2 - X_3$$

となる。

$f = 0.5L$ かつ $I_s / I_c = 5$ の場合で、式(3.4-3.1)での $m=1.1, 1.5, 2.0, 3.5, 3.0$ の各値について、半支間長を 10 分割したときの台形公式による数値積分を実行すれば、表 3.4-3-1 の結果を得る。表より、 $m=1.1$ の場合が曲げモーメントの大きさが最も小さくなっていることが分かる。このときの曲げモーメント図を図 3.4-3.2 に示す。

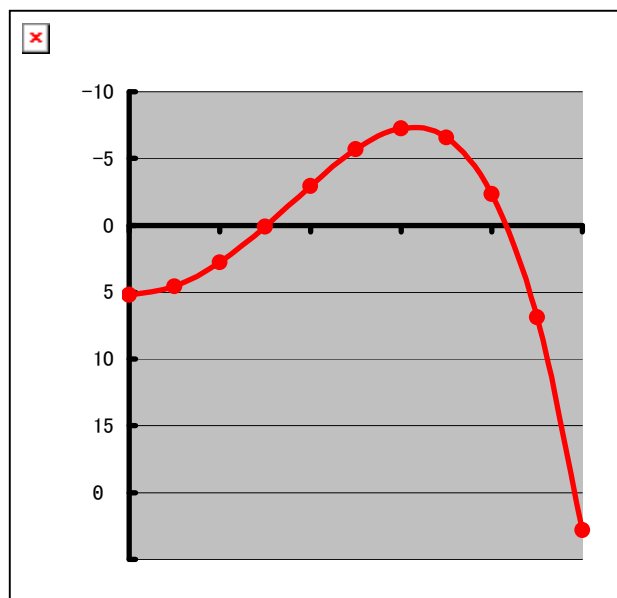


図 3.4-3.2 曲げモーメント図 (1/2 支間)

3.5 ラーメンに関する例題

例題 3.5-1 剛域を有するラーメン (道示関連：コンクリート橋編，ラーメン橋)

コンクリートラーメン橋では部材の幅が長さに比べて小さい場合があり、構造解析では断面の図心をとる軸を骨組について行うが、隅角部では部材幅やハンチ部の一部を剛域として取り扱う必要がある。また、剛域部やハンチ部での剛性の変化を無視した解析では、図 3.5-1-1 に示すように、曲げモーメント図をシフトしたものを設計に用いなければならないとされている。

ところで、図 3.5-1-2 に示すような、等分布荷重 q_0 を受ける固定ラーメンにおいて、剛域の長さが曲げモーメント分布にどのような影響を与えるのかを調べ、図 3.5-1-1 のモーメントシフトの意義を説明せよ。ただし、剛域以外の部分の曲げ剛性は、柱部では EI_c 、はり部では EI_b とし、軸力およびせん断力の変形に与える影響は無視する。

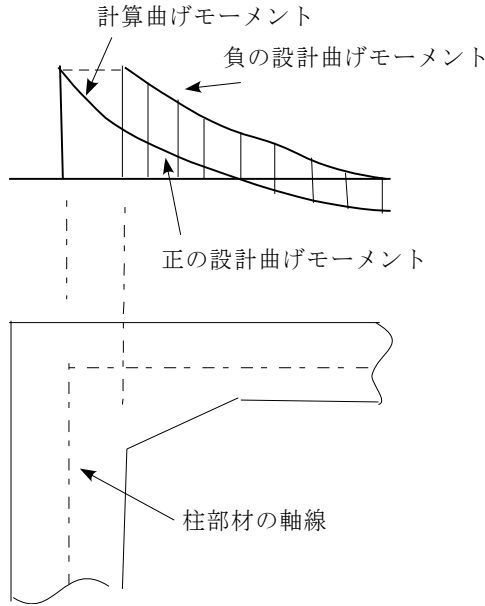


図 3.5-1-1 モーメントシフト

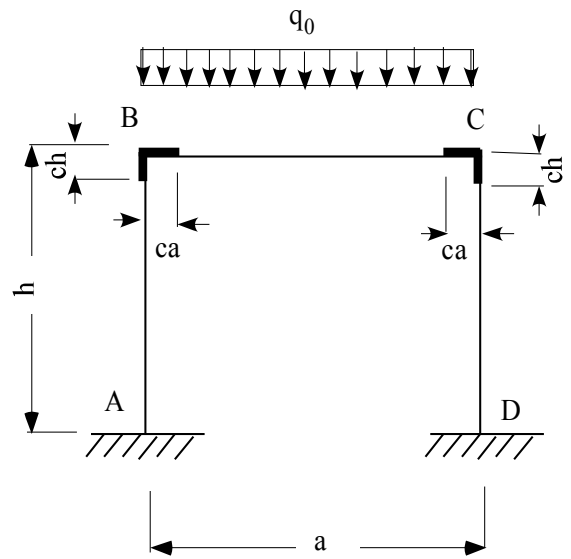


図 3.5-1-2 剛域を有する門形ラーメン

解答

図 3.5-1-2 の門形ラーメンは 3 次不静定系であるが、対称性より支点の鉛直反力は $V_A = V_B = q_0 a / 2$ であるので、支点 D での水平反力 X_1 および曲げモーメント X_2 を不静定力に採った片持ち構造を静定基本形に選ぶ (図 3.5-1-3 参照)。図に示すような座標 x_1, x_2, x_3 を採り、対称性を考慮すれば、静定基本系の荷重 q_0 による曲げモーメントは

$$M_0 = 0, 0 \leq x_1 \leq h \quad (3.5-1-1)$$

$$M_0 = \frac{q_0}{2} x_2 (a - x_2), 0 \leq x_2 \leq a/2$$

$X_1 = 1$ による曲げモーメントは

$$M_1 = x_1, 0 \leq x_1 \leq h \quad (3.5-1-2)$$

$$M_1 = h, 0 \leq x_2 \leq a/2$$

$X_2 = 1$ による曲げモーメントは

$$M_2 = -1, 0 \leq x_1 \leq h \quad (3.5-1-3)$$

$$M_2 = -1, 0 \leq x_2 \leq a/2$$

弾性方程式は

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = -\delta_{10} \quad (3.5-1-4)$$

$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = -\delta_{20}$$

ここに、

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{2}{EI_c} \int_0^{h(1-c)} M_0 M_1 dx_1 + \frac{2}{EI_b} \int_{ca}^{a/2} M_0 M_1 dx_2 \\ &= \frac{2q_0 h}{2EI_b} \int_{ca}^{a/2} x_2 (a - x_2) dx_2 = \frac{q_0 h}{EI_b} \left\{ \frac{a^3}{2} \left(\frac{1}{4} - c^2 \right) - \frac{a^3}{3} \left(\frac{1}{8} - c^3 \right) \right\} = \frac{q_0 a^3 h}{12EI_b} [1 - 2c^2 (3 - 2c)] \end{aligned} \quad (3.5-1-5)$$

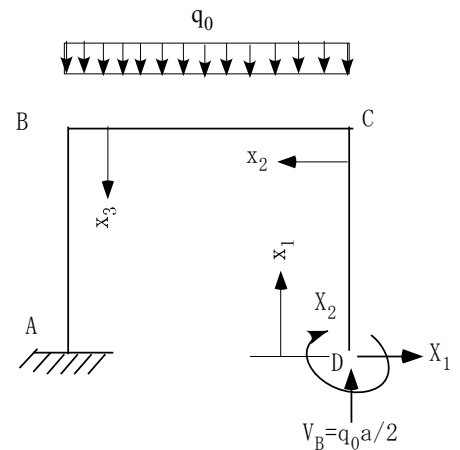


図 3.5-1-3 静定基本系

$$\delta_{20} = \frac{2}{EI_c} \int_0^{h(1-c)} M_0 M_2 dx_1 + \frac{2}{EI_b} \int_{ca}^{a/2} M_0 M_2 dx_2 = -\frac{2q_0}{2EI_b} \int_{ch}^{a/2} x_2 (a-x_2) dx_2$$

$$= -\frac{q_0 a^3}{12EI_b} [1 - 2c^2(3-2c)]$$
(3.5-1-6)

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{2}{EI_c} \int_0^{h(1-c)} M_1 M_2 dx_1 + \frac{2}{EI_a} \int_{ca}^{a/2} M_1 M_2 dx_2$$

$$= -\frac{2}{EI_c} \int_0^{h(1-c)} x_1 dx_1 - \frac{2h}{EI_b} \int_{ca}^{a/2} dx_2 = -\frac{2h}{E} \left[\frac{h(1-c)^2}{2I_c} + \frac{a}{I_b} \left(\frac{1}{2} - c \right) \right]$$
(3.5-1-7)

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI_c} \int_0^{h(1-c)} M_1^2 dx_1 + \frac{2}{EI_a} \int_{ca}^{a/2} M_1^2 dx_2$$

$$= \frac{2}{E} \int_0^{h(1-c)} x_1^2 dx_1 + \frac{2h^2}{EI_a} \int_{ca}^{a/2} dx_2 = \frac{2}{E} \left[\frac{h^3(1-c)^3}{3I_c} + \frac{ah^2}{I_b} \left(\frac{1}{2} - c \right) \right]$$
(3.5-1-8)

$$\delta_{22} = \frac{2}{EI_c} \int_0^{h(1-c)} M_2^2 dx_1 + \frac{2}{EI_a} \int_{ca}^{a/2} M_2^2 dx_2$$

$$= \frac{2h(1-c)}{EI_c} + \frac{2a}{EI_b} \left(\frac{1}{2} - c \right)$$
(3.5-1-9)

式(3.5-1-4)の連立1次方程式の解は

$$X_1 = \frac{-\delta_{10}\delta_{22} + \delta_{20}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}, \quad X_2 = \frac{-\delta_{20}\delta_{11} + \delta_{10}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}$$
(3.5-1-10)

となる。

一例とし、 $h=a$ 、 $I_c=I_B$ の場合で、 $c=0.0, 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ の5ケースについて、はりB-C、ただし1/2領域の曲げモーメント分布を計算すると図3.5-1-4のようになり、柱D-Cの曲げモーメント分布は図3.5-1-5のように求められる。これらの図より、剛域が長くなるにつれて、負曲げモーメント増大し、正曲げモーメントが減少することが分かる。

したがって、剛域を無視した解析結果を設計に用いる場合には、安全性を配。

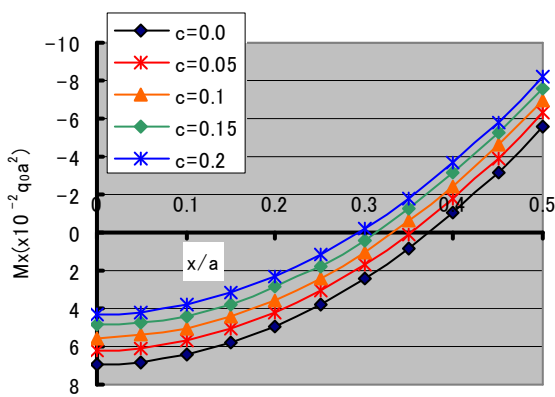


図 3.5-1-4 はり B-C での曲げモーメント
(x は中央点からの距離)

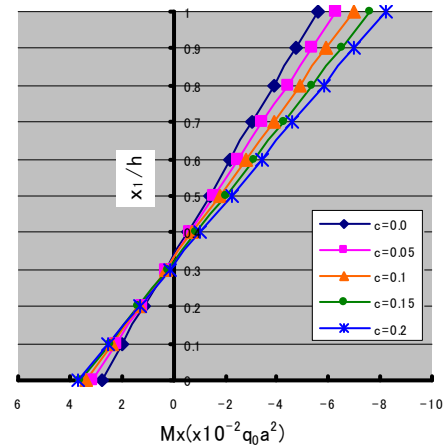


図 3.5-1-5 柱 D-C での曲げモーメント図

慮して、図 3.5-1-1 のように負曲げモーメント図のみシフトしたものが適用されることが分かる

例題 3.5-2 隅角部の応力（道示関連：コンクリート橋編，ラーメン橋）

道路橋示方書，コンクリート橋では，ラーメン橋の隅角部の応力は複雑であり，慣用の初等骨組理論では解析できなく，図 3.5-3.1 のような非線形応力分布を示し，はりの上縁が引張になる曲げモーメント M を受けた場合には，隅角部内側で圧縮応力が集中し，逆方向の曲げモーメント $-M$ を受けた場合には，隅角部内側で引張が集中する．それゆえ，これらの応力集中に対処する上でも，隅角部にハンチをつける必要性を指摘しており，ハンチを付けないときには，引張応力の集中には格別の注意が必要であると指摘し

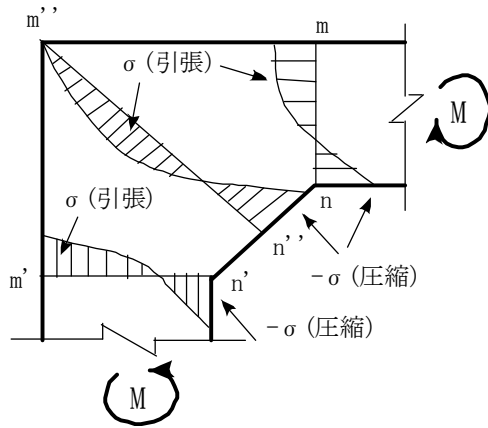


図 3.5-3.1 隅角部の応力分布（道示，コンクリート橋編による）

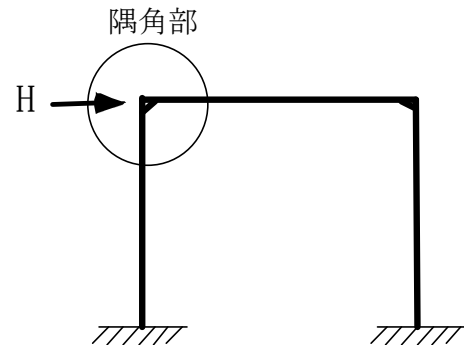


図 3.5-3.2 水平荷重を受ける門型ラーメン

ている。

ところで，図 3.5-3.2 のような門型ラーメンが水平地震荷重 H を受けるときの隅角部の応力分布を求め，慣用の初等骨組理論による解析値との相違を明らかにせよ。

解答

RC 構造のラーメンなどの隅角部は，コンクリートのひび割れ発生前では，2次元弾性問題（平面応力問題）として取り扱える．図 3.5-3.2 は隅角部の部分モデルと有限要素分割を示している．本モデルは，図 3.5-3.2 の門型ラーメンが水平荷重が作用したときに，はり左端の断面で曲げモーメントとせん断力を受けた場合を想定している．

一例として， $a=2m$ ， $b=3.68m$ ， $t=0.5m$ で， $V=1.0MN$ ，弾性係数： $E=3 \times 10^4 N/mm^2$ ，ポアソン比： $\nu=1/6$ での計算結果を図 3.5-3.4～図 3.5-2-8 に示す．すなわち，図 3.5-3.4 ははり左端断面 m-n での水平方向応力 σ_x を示しており，初等ばり理論値に比べて，FEM 解析値は下端の圧縮応力の集中が認められ，図 3.5-3.1 と同様の傾向が認められる．図 3.5-3.5 のせん断応力分布 τ_{xy} では，下端の集中性はよ

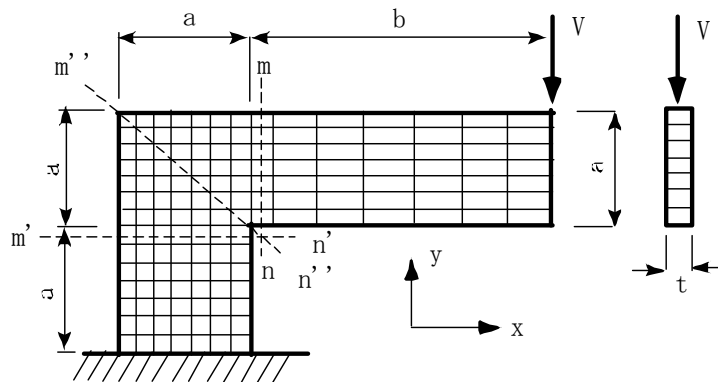


図 3.5-3.2 隅角部モデルと FEM 要素分割

り顕著であり、放物線形の初等曲げ理論分布とは大きく異なっていることが分かる。

一方、柱上端の断面 $m'-n'$ の鉛直方向応力 σ_y 分布も図 3.5-3.1 と同様の内側縁での圧縮応

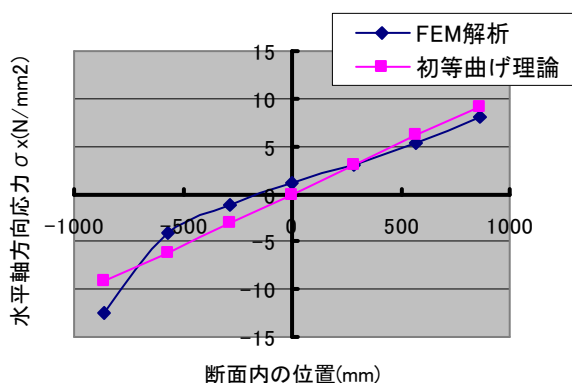


図 3.5-3.4 $m-n$ 断面の σ_x 分布

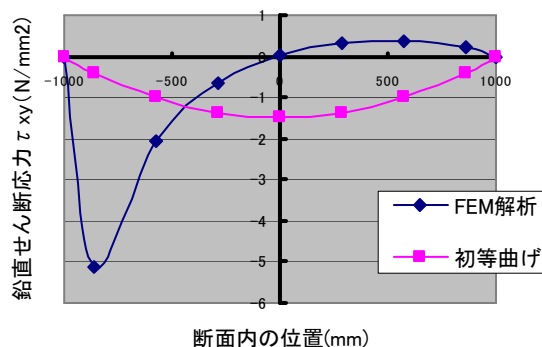


図 3.5-3.5 $m-n$ 断面の τ_{xy} 分布

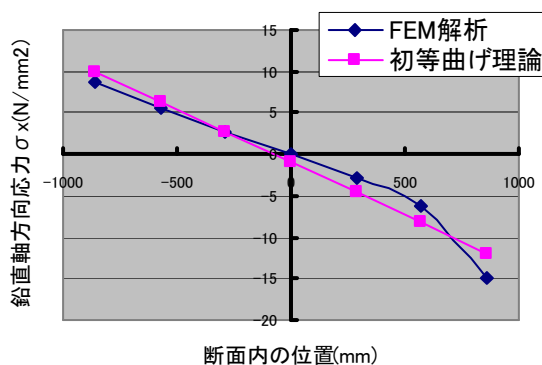


図 3.5-2-6 $m'-n'$ 断面の σ_y 分布

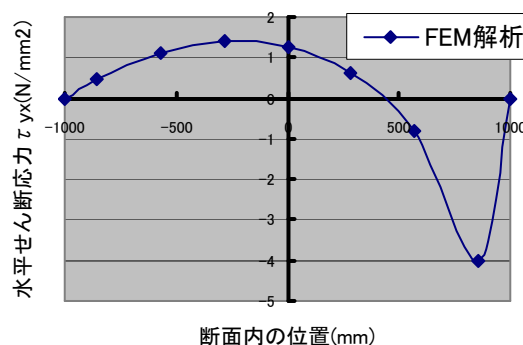


図 3.5-2-7 $m'-n'$ 断面の τ_{yx} 分布力

の集中性が認められるが、せん断応力 τ_{yx} は、初等ばり理論ではゼロであるにも係わらず、FEM 解析では、合せん断力はゼロであっても、内側縁近傍ではかなり大きな値が発生していることが注目できる。さらに、隅角部内の対角線に沿った断面 $m''-n''$ での直応力 $\sigma_{\theta=45}$ の分布を図 3.5-2-8 に示すが、図 3.5.3.1 での道路橋示方書の指摘と同様になっていることが分かる。

以上、ラーメン構造の隅角部の応力集中現象は、はりまたは柱から伝達されるせん断力による影響が大きく、曲げ応力のみならずせん断応力の集中現象が連成することが考えられ、隅角部内側が引張になる場合には、特に合応力 σ_1 、すなわち

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + \tau_{xy}^2} \quad \text{または}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_y^2 + \tau_{yx}^2} \quad (3.5-3.1)$$

に対する十分な引張補強を配慮する必要性が強調できる。

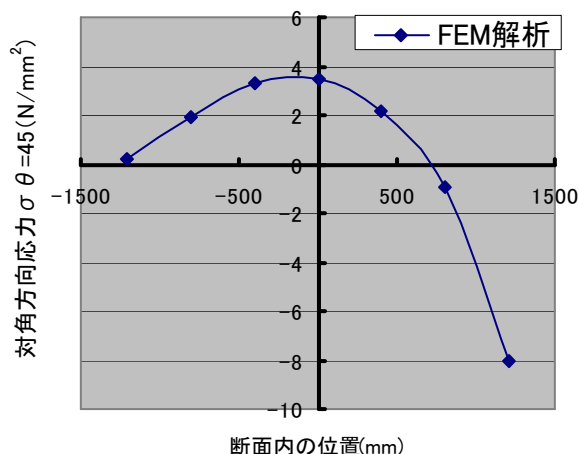


図 3.5-2-8 $m''-n''$ 断面の $\sigma_{\theta=45}$ 分布