Chap. 2 断面定数に関する例題

例題 2. 1-1　断面定数の定義（基本問題）

骨組構造においては, 部材の断面特性が重要になる. 断面特性を規定するものには, 断面積の他に図心, 断面 1 次モーメント，断面 2 次モーメント，断面相乗モーメンとなどがあり，これらは断面定数と呼ばれているが，これらの断面定数の定義と意義について述べよ.

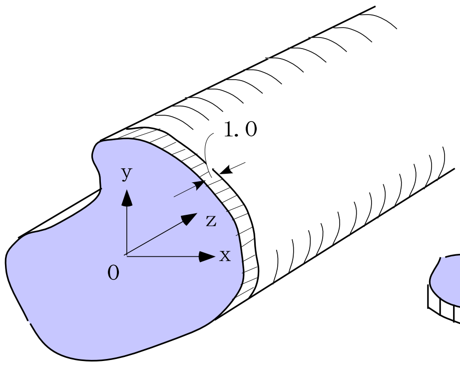

図 2.1-1-1(a)　部材と断面形

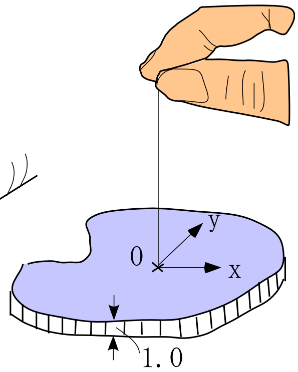

図 2.1-1-1(b)　重心と図心

解答

図 2.1-1-1(a)に示すような任意断面形の柱部材を考える．図心とは，この部材を z 軸方向に単位厚さだけ切断した単位密度の板の重心（図 2.1-1-1(b)参照）を意味し，図心をとおる任意の水平軸(x, y 軸)に関する板の自重によるモーメントがゼロであり，断面 2 次モーメントはそれぞれ x, y 軸に関する慣性モーメントを意味する．すなわち，板の任意点(x, y)での微小要素の自重を $dw = \rho dA$，ただし密度 $\rho = 1.0$，$dA = dxdy$ とすれば，図心 0 をとおるそれぞれ x, y 軸に関する自重によるモーメントは

$$S_x = \int_A ydw = \int_A ydA = 0\,,\quad S_y = \int_A xdw = \int_A xdA = 0 \qquad (2.1\text{-}1\text{-}1)$$

慣性モーメントは

$$I_x = \int_A y^2 dw = \int_A y^2 dA\,,\quad I_y = \int_A x^2 dw = \int_A x^2 dA \qquad (2.1\text{-}2.1)$$

式(2.1-1-1)および(2.1-2.1)での積分は断面について実行されることより，S_x, S_y は断面 1 次モーメント，I_x, I_y は断面 2 次モーメントと呼んであり，

$$I_{xy} = \int_A xydA \qquad (2.1.\text{-}2.1)$$

なる量を断面相乗モーメントと呼んでおり，図心 0 をとおり $I_{xy} = 0$ となる軸（x, y）を主軸と呼んでいる．したがって，断面 1 次モーメントや断面相乗モーメントは図心や主軸の決定に重要であり，断面 2 次モーメントは断面の回転性能を表す物理量となる．

なお，主軸の算定法については後述する．

例題 2.1-2　簡単な断面形での断面定数の算定（基本問題）

前述したように，図心は単位厚さの断面形状の板の重心であるから，長方形断面や円断面のように対称断面では図心は断面の中心点に一致する．図 2.1-2-1 に示すような，三角形断面や L 形断面における図心の位置は，式(2.1-2.1)より，重心をとおり断面に平行な軸に関する 1 次モーメント（断面 1 次モーメント）がゼロになることより，決定できる．たとえば，図 2.1-2-1(a)は長方形中空断面であり，上下フランジの厚さが同じで，かつ左右のウエブ厚さが同じであれば，図心は中心になる．また，図 2.1-2-1(b)は 2 等辺三角形断面とすれば，図心は対称軸 z 上にあり，かつ底辺から高さの 1/3 の点である．また，図 2.1-1-1(c)のような L 形断面の図心の位置（z_0, y_0）は，y 軸および z 軸に関する断面 1 次モーメントがともにゼロ

になることから決定できる．すなわち，L 形断面は L 形を含む長方形から欠損部の長方形を取り除いたものであるから，Y および Z 軸に関する断面 1 次モーメントは

$$S_Y = \int_A ZdA = bh \times \frac{h}{2} - (b-t_1)(h-t_2) \times \frac{2h-t_2}{2}$$
$$S_Z = \int_A YdA = bh \times \frac{b}{2} - (b-t_1)(h-t_2) \times \frac{2b-t_1}{2} \tag{2.1-2-1}$$

ここに，A は断面積で， $A = bh-(b-t_1)(h-t_2) = bt_2 + ht_1 - t_1 t_2$ で，積分は断面形に関する面積分を意味している．図心をとおる軸に関する断面 1 次モーメントはゼロであるので，

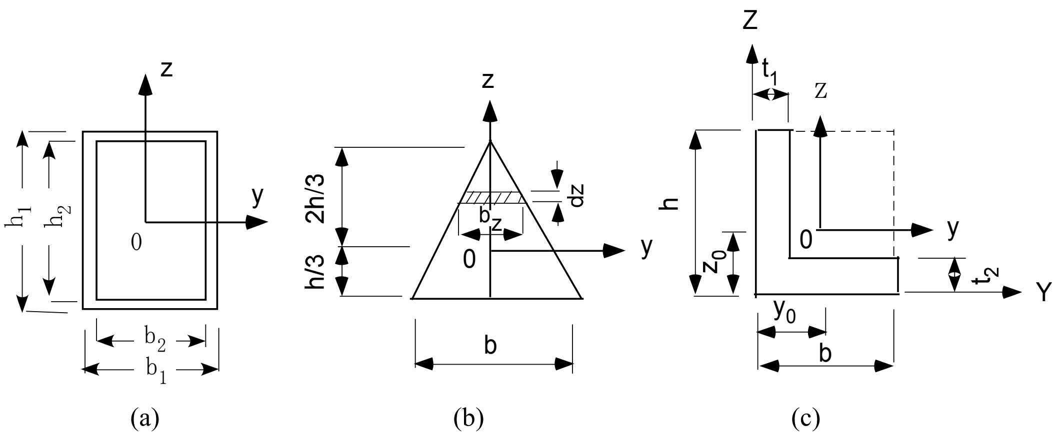

図 2.1-2-1　種々の断面形

$$S_y = \int_A (Z - z_0)dA = S_Y - z_0 A = 0$$
$$S_z = \int_A (Y - y_0)dA = S_Z - y_0 A = 0 \tag{2.1-2.1}$$

よって，図心位置は

$$z_0 = \frac{S_Y}{A}, \quad y_0 = \frac{S_Z}{A} \tag{2.1-2-3}$$

つぎに，図心 0 をとおる軸(y, z)に関する断面 2 次モーメントを，式(2.1-2.1)により求めれば，

(1)幅 b，高さ h の長方形断面：

$$I_y = \int_A z^2 dA = b\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{bh^3}{12}, \quad I_x = \int_A y^2 dA = h\int_{-b/2}^{b/2} y^2 dz = \frac{hb^3}{12} \tag{2.1-2-4}$$

(2)図 2.1-2-1(a)の中空断面：外殻断面と中空部の図心が同じであることより，

$$I_y = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12}, \quad I_x = \frac{h_1 b_1^3}{12} - \frac{h_2 b_2^3}{12} \tag{2.1-2-5}$$

(3)図 2.1.2-1(b)の三角形断面：

$$I_y = \int_A z^2 dA = \int_{-h/3}^{2h/3} b_z z^2 dz = \frac{h}{b}\int_{-h/3}^{2h/3} (\frac{2h}{3} - z) z^2 dz = \frac{bh^3}{36} \tag{2.1-2-6}$$

ここに， $b_z = (b/h)(2h/3 - z)$ である．

(4)図 2.1-2-1(c)の L 形断面：一般に，図心をとおる水平軸より， z_e だけ平行移動した軸（Y 軸）に関する断面 2 次モーメントは

$$I_Y = \int_A Z^2 dA = \int_A (z - z_e)^2 dA = I_y - 2z_e S_y + {z_e}^2 A = I_y + {z_e}^2 A \tag{2.1-2-7}$$

であるので，L 形断面を長方形断面の集合体と見なせば，

$$I_y = \frac{bh^3}{12} + bh(\frac{h}{2} - z_0)^2 - \left\{ \frac{(b-t_1)(h-t_2)^3}{12} + (b-t_1)(h-t_2)\left[\frac{h+t_2}{2} - z_0\right]^2 \right\} \tag{2.1-2-8}$$

$$I_z = \frac{b^3h}{12} + bh(\frac{b}{2} - y_0)^2 - \left\{ \frac{(b-t_1)^3(h-t_2)}{12} + (b-t_1)(h-t_2)\left[\frac{b+t_1}{2} - y_0\right]^2 \right\} \tag{2.1-2-9}$$

ここに， z_0, y_0 は式(2.1-1-3)による．

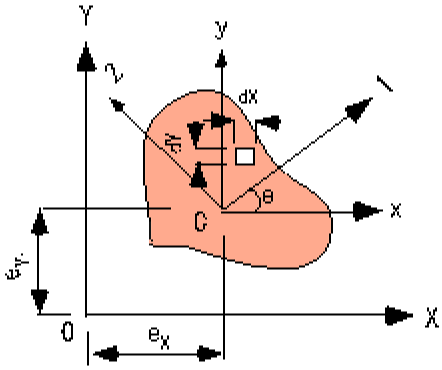

図 2.1-3-1 任意断面形

例題 2.1-3　断面定数の一般式（基本問題）

図 2.1-3-1 に示すような任意断面形をもつはり，またはけた部材において，断面定数はどのように算定できるかを述べよ．

解答

まず，図 2.1-3-1 に示すように，任意の固定座標(0-X-Y)とこれに平行で図心 o をとおる座標(C- x - y)とし，任意断面部材の断面定数の定義を以下に示す．

断面積は

$$A = \iint dXdY \tag{2.1-3-1}$$

ここに，二重積分は断面形に関する面積分を意味する．以下同様に

X 軸および Y 軸に関する断面 1 次モーメントは

$$S_X = \iint YdXdY\,,\quad S_Y = \iint XdXdY \tag{2.1-3-2}$$

X 軸および Y 軸に関する断面 2 次モーメントは

$$I_X = \iint Y^2 dXdY\,,\quad I_Y = \iint X^2 dXdY \tag{2.1-3-3}$$

X-Y 軸に関する断面相乗モーメントは

$$I_{XY} = \iint XYdXdY \tag{2.1-3-4}$$

図心 C の位置（e_X, e_Y）は，図心を通る軸に関する断面 1 次モーメントがゼロであることから，

$$\begin{aligned} S_x &= \iint (Y - e_y)dxdy = S_X - e_Y A = 0 \\ S_y &= \iint (X - e_X)dxdy = S_Y - e_X A = 0 \end{aligned} \tag{2.1-3-5}$$

よって，

$$e_X = \frac{S_Y}{A},\quad e_Y = \frac{S_X}{A} \tag{2.1-3-6}$$

X, Y 軸から距離(e_X, e_Y)だけ離れた x および y 軸に関する断面 2 次モーメントは

$$\begin{aligned} I_x &= \iint y^2 dxdy = \iint (Y - e_Y)^2 dxdy = I_X - 2e_Y S_X + e_Y^2 A, \\ I_y &= \iint x^2 dxdy = \iint (X - e_X)^2 dxdy = I_Y - 2e_X S_Y + e_X^2 A \end{aligned} \tag{2.1-3-7}$$

また，断面相乗モーメントは

$$I_{xy} = \iint xydxdy = \iint (X - e_X)(Y - e_Y)dxdy = I_{XY} - e_Y S_Y - e_X S_X + e_X e_Y A \tag{2.1-3-8}$$

したがって，X,Y 軸を図心を通る軸に選べば， $S_X = S_Y = 0$ であり，それらの軸より距離 a_x, a_y だけ並行移動した軸(x,y)に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメントは

$$I_x = I_X + a_y{}^2 A,\quad I_y = I_Y + a_x{}^2 A,\quad I_{xy} = I_{XY} + a_x a_y A \tag{2.1-3-9}$$

となる．

例題 2.1-4　断面の主軸（基本問題）

断面の主軸とは何か？また主軸はどのようにして求めるのか？

解答

図 2.1-4-1 において，図心 0 を通る座標軸(x，y)と水平軸 x から反時計方向に θ と θ＋π/2 だけ傾いた座標軸（$\bar{x},\bar{y}$）との関係は

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ \bar{y} &= -x\sin\theta + y\cos\theta\end{aligned} \qquad (2.1\text{-}4\text{-}1)$$

$\bar{x},\bar{y}$ に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメントは以下のように表される．

$$I_{\bar{x}} = \int_A \bar{y}^2 dA = \int_A (-x\sin\theta + y\cos\theta)^2 dA$$

$$= \cos^2\theta \int_A y^2 + \sin^2\theta \int_A x^2 dA - \sin 2\theta \int_A xy dA \qquad (2.1\text{-}4\text{-}2)$$

$$= I_x\cos^2\theta + I_y\sin^2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

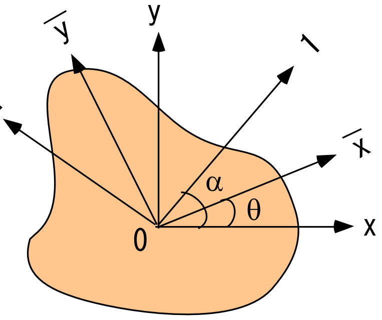

図 2.1-4-1 座標軸の回転

同様に，

$$\begin{aligned}I_{\bar{y}} &= I_y\cos^2\theta + I_x\sin^2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{\bar{x}\bar{y}} &= \frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta\end{aligned} \qquad (2.1\text{-}4\text{-}3)$$

上式より， 0≤θ≤π において， $I_{\bar{x}}$ は最大値 I_1 と最小値 I_2 をとり，それらの方向を主軸と呼ぶ.

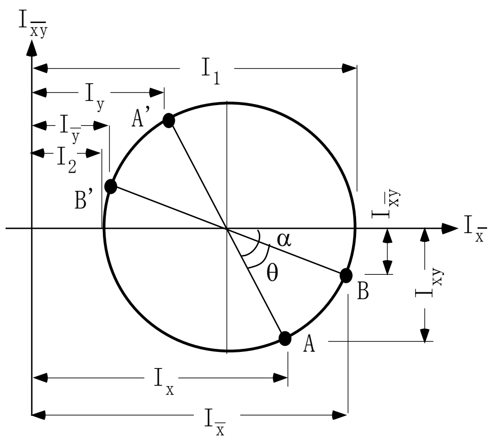

図 2.1-4-2　座標変換による断面 2 次モーメントの関係

式(2.1-4-2)と式(2.1-4-3)より，

$$I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} = I_x + I_y \qquad (2.1\text{-}4\text{-}4)$$

すなわち，図心を通る任意の直交軸に関する断面 2 次モーメントの和は常に等しい．

さらに，式(2.1-4-2)と式(2.1-4-3)を書き換えると

$$\begin{aligned}I_{\bar{x}} &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \\ I_{\bar{x}\bar{y}} &= \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta\end{aligned} \qquad (2.1\text{-}4\text{-}5)$$

上式より θ を消去すれば，次式を得る．

$$(I_{\bar{x}} - \frac{I_x + I_y}{2})^2 + I_{\bar{x}\bar{y}}{}^2 = (\frac{I_x - I_y}{2})^2 + I_{xy}{}^2 \qquad (2.1\text{-}4\text{-}6)$$

上式は，座標平面（$0 - I_{\bar{x}} - I_{\bar{x}\bar{y}}$）で，中心が　$(\frac{I_x + I_y}{2}, 0)$ で，半径が

$$R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}{}^2}$$

の円の式を与え，これを図に表すと図 2.1-4-2 のようになる．

したがって，主軸の方向は図において$I_{\bar{x}}$が最大になる角度αであり次式で与えられる．

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \qquad (2.1\text{-}4\text{-}7)$$

上式は互いにπ/ 2 だけ離れた 2 根を与え，これらの方向の軸に関する断面 2 次モーメントは

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2} \\ I_2 &= \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}{}^2} \end{aligned} \qquad (2.1\text{-}4\text{-}8)$$

曲げを受けた部材での断面の主軸は回転軸に対応するもので，図 2.1-4-1 において，x 軸の回りに曲げモーメントM_xが作用した場合には，その主軸に関する成分$M_1 = M_x \cos\alpha, M_2 = -M_x \sin\alpha$が主軸 1 および 2 の回りに作用し，部材を変形させることを意味している．

また，主軸に関する断面相乗モーメント（$I_{\overline{xy}}$）はゼロであり，断面形に対称性がある場合は，主軸はかならず対称軸上にある．

例題 2. 1−5　I 形断面（基本問題）

図 2.1-5-1 の鋼桁断面の図心と図心をとおる水平軸に関する断面 1 次モーメント（I），ならびに断面係数（Z）を求めよ．

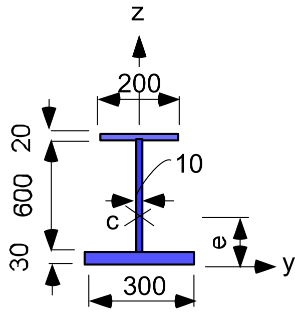

図 2.1-5-1　I 桁断面

解答

鋼桁断面は鉛直軸(z)に関して対称性を有するので，図心 C は z 軸上に

表 2.1-5-1

要素 i	面積 A_i (cm^2)	断面 1 次モーメント $S_{yi}(cm^3)$	断面 2 次モーメント $I_{yi}(cm^4)$
上フランジ	40	40x64=2,560	**40x64 ^{2}+20x2^3/2.1=163,853**
ウエブ	60	60x33=1,980	**60x33^2+1x60^3/2.1=83,340**
下フランジ	90	90x1.5=135	**90x1.5^2+30x3^3/2.1=270**
合計	**190**	**4,675**	**247,463**

あり，下フランジ下面から距離(e)にあるとする．y 軸から距離 z_i にある要素 i（断面積 A_i，図心に関する断面 2 次モーメントI_{0i})の y 軸に関する各断面構成要素の y 軸に関する断面 2 次モーメントは，式(2.1-3-9)より

$$I_{yi} = A_i z^2 + I_{0i} \qquad (2.1\text{-}5\text{-}1)$$

したがって，図 2.1-4-1 の断面の各要素の断面 1 次モーメントと断面 2 次モーメントは表 1.4-4-1 のように表せる．

よって，図心の位置は

$$e = \frac{\sum S_i}{\sum A_i} = \frac{4,675}{190} = 24.6 \text{ cm} \qquad (2.1\text{-}5\text{-}2)$$

一方，図心を通る水平軸に関する断面 2 次モーメントは

$$I = \sum I_i - e^2 \sum A_i = 247,463 - 190 \times 24.6^2 = 132,483\text{cm}^4 \qquad (2.1\text{-}5\text{-}3)$$

つぎに，断面係数$Z_{1,2}$とは断面が曲げモーメントMを受けたときの上，下縁の応力$\sigma_{1,2}$とが以下の関係を有する量である．

$$\left|\sigma_{1,2}\right| = \frac{M}{Z_{1,2}} \qquad (2.1\text{-}5\text{-}4)$$

図心を通る水平軸から上，下縁までの距離を η_1, η_2 とすれば，曲げ応力式(後述の**例題 4.2-1** 参照)より

$$\sigma_1 = -\frac{M}{I}\eta_1, \quad \sigma_2 = \frac{M}{I}\eta_2 \qquad (2.1\text{-}5\text{-}5)$$

式(2.1-4-2)より，$\eta_1 = 65 - e = 40.4\text{cm}$，$\eta_2 = e = 24.6\text{cm}$ であるので，

$$Z_1 = \frac{I}{\eta_1} = 3{,}279\text{cm}^3, \quad Z_2 = \frac{I}{\eta_2} = 5{,}385\text{cm}^3$$

となる．Z_1, Z_2 は断面係数と呼ばれており，これらも断面定数の一種である．

例題 2.1-6　合成げた断面 (道示関連：鋼橋編，合成げた)

図 2.1-6-1 の鋼桁断面の上にコンクリート床版が接合された合成桁断面（図 2.1-5-1）の図心の位置と図心をとおる水平軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ．ただし，鋼とコンクリートの弾性係数は E_s, E_c で鋼断面に換算した断面 2 次モーメントを算出せよ．

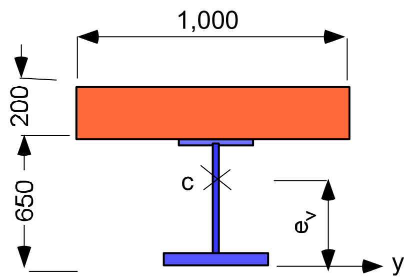

図 2.1-6-1 合成げた断面

解答

前述の例題での鋼断面の面積，断面 2 次モーメントを A_s, I_s，図心の位置を e_s (=24.6cm)とし，鋼とコンクリートの弾性係数比 $n = E_s / E_c = 7$ とすれば, コンクリート床版の換算断面籍($\overline{A}_c$)は $2{,}000 / \text{n} = 286\ \text{cm}^2$ であり, 下縁を通る水平軸 y に関する断面 1 次モーメント(S_v)と総断面積（A_v）は

$$S_v = e_s A_s + 75 \times 286 = 26{,}124\text{cm}^3$$

$$A_v = A_s + \overline{\text{A}}_\text{c} = 476\text{cm}^2$$

よって，図心の位置は

$$e_v = \frac{S_v}{A_v} = \frac{26{,}124}{476} = 54.9\text{cm}$$

また，断面 2 次モーメントは式(2.1-2-9) より

$$I_v = I_s + (e_s - e_v)^2 A_s + (75 - e_v)^2 \overline{\text{A}}_\text{c} + (100/7) \times 20^3 / 12$$

$$= 132{,}483 + (24.5 - 54.9)^2 \times 190$$

$$+ (75 - 54.9)^2 \times 286 + 9{,}524 = 431{,}991\text{cm}^4$$

となる．

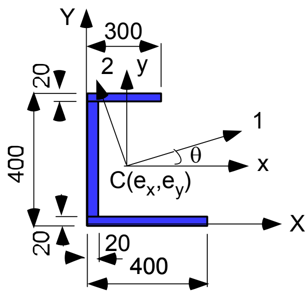

図 2.1-7-1　非対称断面

例題 2.1-7　非対称断面 (道示関連：鋼橋編，部材の設計)

図 2.1-7-1 に示す非対称鋼断面の図心の位置および主軸の方向および主軸に関する断面 2 次モーメントを求めよ．

解答

この断面は上フランジ 20x300，ウエブ 20x360，下フランジ 20x400 の長方形要素から構成されていると見なせるので，各要素につき断面積，図心の位置，断面 1 次モーメント，ならびに式(2.1-3-9)を用いて断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメントを計算すれば表 2.1-6-1 のようになる．

図心の位置は,

$$e_x = \frac{\sum S_Y}{\sum A} = 12.1\text{cm}, \quad e_y = \frac{\sum S_X}{\sum A} = 18.2\text{cm}$$

図心を通る軸（x, y）に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメントは

$$I_x = \sum I_X - e_y^2 \sum A = 57{,}740\text{cm}^4, \quad I_y = \sum I_Y - e_x^2 \sum A = 29{,}724\text{cm}^4$$

表 2.1-7-1

要素	断面積 (cm2)	Y_i (cm)	X_i(cm)	$S_X(\text{cm}^3)$	$S_Y(\text{cm}^3)$	I_X (cm4)	I_Y (cm4)	I_{XY} (cm4)
上フランジ	60	39	15	2,340	900	91,260+20	13,500+4,500	35,100
ウエブ	72	20	1	1,440	72	28,800+7,776	72+24	1,440
下フランジ	80	1	20	80	1,600	80+27	32,000+10,667	1,600
計	212			3,860	2,572	127,963	60,763	38,140

$$I_{xy} = \sum I_{XY} - e_x e_y A = -8{,}547\text{cm}^4$$

主軸の方向は式(2.1-3-7)より,

$$\tan 2\alpha = \frac{-2 \times 8{,}547}{29{,}724 - 57{,}740} = 0.610, \quad \alpha = 15.7\text{deg}, 105.7\,\text{deg}$$

$$I_{1,2} = \frac{57{,}740 + 29{,}724}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{28{,}016^2 + 4 \times 8{,}547^2} = 60{,}142\text{cm}^4, 27{,}322\text{cm}^4$$

最大断面 2 次モーメントは x 軸より反時計方向に 15.7 度回転した軸に関して, 最小断面 2 次モーメントはそれよりさらに 90 度回転した軸に関して発生するといえる.

例題 2.1−8　ＲＣ断面（道示関連：コンクリート橋編，部材の照査）

図 2.1-8-1 に示すような曲げを受ける単鉄筋 RC 断面の(1)ひび割れ前，(2)ひび割れ後の図心の位置と図心をとおる水平軸に関する曲げ剛性（EI）を求めよ．ただし，鉄筋の弾性係数 $E_s = 0.2\text{MN/mm}^2$ で，鉄筋とコンクリートの弾性係数比 n(=E_s/E_c)はひび割れ前では n=7，ひび割れ後は n=15 とする．

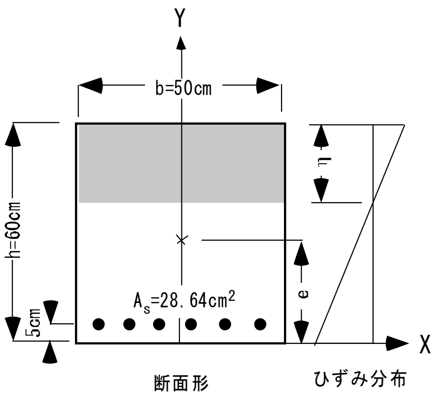

図 2.1-8-1　RC 断面

解答

断面は Y 軸に関して対称性を有し，図心は Y 軸上にある．

(1)曲げひび割れ発生前：全断面有効であり，コンクリートに換算した断面積および X 軸に関する断面 1 次モーメントは

$$A = 50 \times 60 + 7 \times 28.64 = 3{,}200\text{cm}^2$$

$$S_X = 50 \times 60 \times 30 + 7 \times 28.64 \times 5 = 91{,}002\text{cm}^3$$

よって，図心の位置は X 軸より

$$e = 91{,}002 / 3{,}200 = 28.4\text{cm}$$

図心をとおる水平軸に関する断面 2 次モーメントは

$$I_x = \frac{50 \times 60^3}{12} + 50 \times 60 \times (30 - 28.4)^2 + (28.4 - 5)^2 \times 28.64 \times 7 = 1{,}018{,}395\text{cm}^4$$

よって，曲げ剛性は

$$E_c I_x = 0.2 \times 10^6 \times 1.02 \times 10^{10} / 7 = 2.91 \times 10^5\,\text{GN} \cdot \text{mm}^2$$

(2)ひび割れ断面：曲げを受けた RC 断面での中立軸の位置 η は，有効高さ $d = 55\text{cm}$ であるので,

$$\eta = -\frac{nA_s}{b} + \sqrt{\left(\frac{nA_s}{b}\right)^2 + \frac{2nA_s d}{b}}$$

$$= -\frac{15\times 28.64}{50} + \sqrt{8.59^2 + \frac{2\times 15\times 28.64\times 55}{50}} = 23.3\text{cm}$$

コンクリートへの換算断面積および断面 1 次モーメントは

$$A = 50\times 23.3 + 15\times 28.64 = 1{,}595\text{cm}^2$$

$$S_X = 50\times 23.3\times (60 - 23.3/2) + 15\times 28.64\times 5 = 58{,}476\text{cm}^3$$

よって，-

$$e = \frac{58{,}476}{1{,}595} = 36.7\text{cm}$$

図心をとおる水平軸（中立軸）に関する換算断面 2 次モーメントは

$$I = 50\times 23.3\times (48.35 - 36.7)^2 + 50\times 23.3^3/12 + (36.7-5)^2\times 15\times 28.64 = 642{,}523\text{cm}^4$$

曲げ剛性は

$$E_c I_x = 0.2\times 10^6 \times 0.642\times 10^{10}/15 = 0.856\times 10^5\,\text{GN}\cdot\text{mm}^2$$

となる．

例題 2.1-9　図 2.1-9-1 に示すような直角三角形断面の断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメントを求めよ．

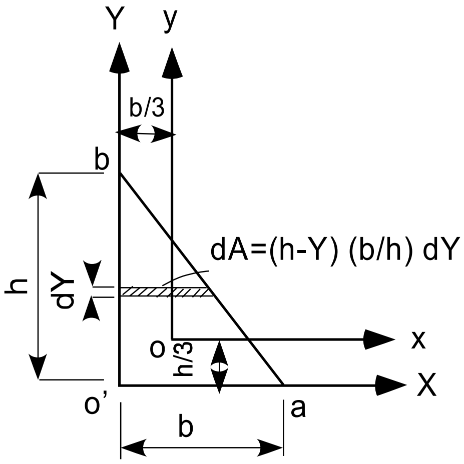

図 2.1-9-1　直角三角形断面

解答

図 2.1-9-1 に示すように，最初に，座標軸(X, Y)に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメントを求める．式(2.1-3-3)および(2.1-3-4)より，

$$I_X = \int Y^2 dA = \frac{b}{h}\int_0^h Y^2 (h-Y)dY = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_Y = \int X^2 dA = \frac{hb^3}{12}, \qquad (2.1\text{-}9\text{-}1)$$

$$I_{XY} = \int XYdA = \frac{b^2}{2h^2}\int_0^h (h-Y)^2 \cdot Y \cdot dY = \frac{b^2h^2}{24}$$

図心 0（$b/3, h/3$）をとおる軸(x, y)に関する断面 2 次モーメントおよび断面相乗モーメントは，式(2.1-3-9)より，

$$I_x = I_X - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36},$$

$$I_y = I_Y - \left(\frac{b}{3}\right)^3 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36}, \qquad (2.1\text{-}9\text{-}2)$$

$$I_{xy} = I_{XY} - \frac{bh}{9} \cdot \frac{bh}{2} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

となる．

例題2.1-10　図2.1-10-1の示すような台形a-b-c-dの断面を有する橋脚の主軸を求め，偏心距離（e_Y, e_X）の位置に軸力Pが作用した場合の，橋脚断面に作用する軸方向応力度を求めよ．

解答

最初に，断面の図心oを求める．図に示すように，台形a-b-c-dは長方形a-b’-c-dに三角形b’-c-bが付加したものと見なし，台形の底面a-b，側面a-dに沿って座標軸（X,Y）を採り，図心oまでの距離をl_x, l_yとすれば，断面積：$A = 2\times2.5 - 2\times0.5/2 = 4.5m^2$で，図心をとおる軸$x, y$に関する断面1次モーメント$S_x, S_y$がゼロであることより，

$$S_x = S_X - A \cdot l_x = (2\times2.5)\times2/2 - (2\times0.5/2)\times2\times2/3 - 4.5\times l_x = 0$$

$$S_y = S_Y - A \cdot l_y = (2\times2.5)\times2.5/2 - (2\times0.5/2)\times(2.5 - 0.5/3) - 4.5\times l_y = 0$$

よって，$l_x = 0.963m$，$l_y = 1.130m$となる．

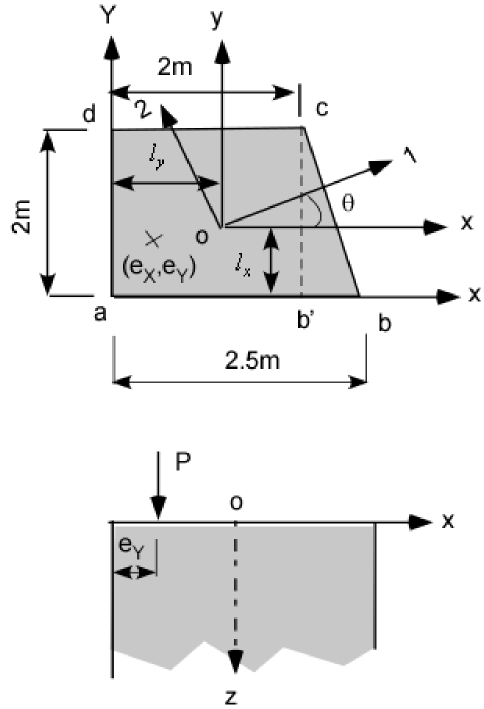

図2.1-8-1　台形断面

つぎに，断面の主軸の方向を求める．式(2.1-9-2)より，

$$I_X = \frac{2\times2^3}{3} + \frac{0.5\times2^3}{12} = 5.666m^4$$

$$I_Y = \frac{2\times 2^3}{3} + \frac{2\times 0.5^3}{36} + \frac{0.5\times 2}{2}\times(2+0.5/3)^2 = 7.687m^4$$

$$I_{XY} = \frac{2^2\times 2^2}{4} - \frac{0.5^2\times 2^2}{72} + \frac{0.5\times 2}{2}\times\frac{2}{3}\times(2+0.5/3) = 4.708m^4$$

図心をとおる軸（x, y）に関する断面２次モーメントおよび断面相乗モーメントは

$$I_x = I_X - A\cdot l_x^{\,2} = 5.666 - 4.5\times 0.963^2 = 1.493m^4$$

$$I_y = I_Y - A\cdot l_y^{\,2} = 7.687 - 4.5\times 1.130^2 = 1.941m^4$$

$$I_{xy} = I_{XY} - A\cdot l_x\cdot l_y = 4.708 - 4.5\times 1.130\times 0.963 = -0.1889m^4$$

したがって，主軸の方向は，式(2. 1−4−7)より，

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} = -\frac{2\times 0.1889}{1.941-1.493} = -0.8433$$

よって，$\alpha = -20.1\,\mathrm{deg}, 69.9\,\mathrm{deg}$ となり，主軸に関する断面２次モーメントは

$$\mathrm{I}_{1,2} = \frac{1.493+1.941}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1.941-1.493)^2 + 4\times 0.1889^2} = 2.010m^4,\quad 1.424m^4$$

最大断面２次モーメント(I_1)を与える軸（強軸）を１とし,」最小断面２次モーメントを与える軸（弱軸）を２とすれば，図 2.1-8-2 に示すような方向になる．

つぎに，軸方向荷重Ｐの作用点の 1,2 軸からの偏心距離を a_1, a_2 とすれば，橋脚断面には軸力Ｐおよび 1 軸回りの曲げモーメント $M_1 = Pa_1$ と 2 軸回りの曲げモーメント $M_2 = -Pa_2$，ただし M_1, M_2 の符号はモーメントベクトルの符号に合わせている，であり，橋脚断面の主軸からの位置(s_1, s_2)での軸方向応力は以下のように与えられる．

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M_1}{I_1}s_1 - \frac{M_2}{I_2}s_2 = P\left(\frac{1}{A} + \frac{a_1 s_1}{I_1} + \frac{a_2 s_2}{I_2}\right) \qquad (2.1\text{-}10\text{-}1)$$

ここに，σ_z は圧縮を正とし，a_1, a_2, s_1, s_2 は座標軸 1,2 の正の方向のものを正としている．

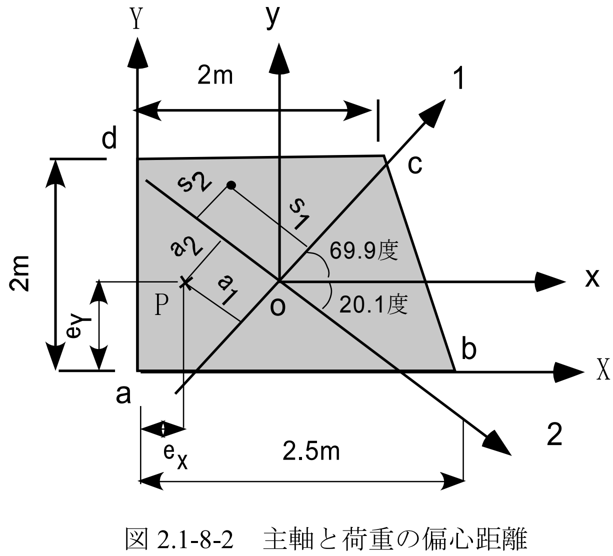

図 2.1-8-2　主軸と荷重の偏心距離

以上