13.2 耐震設計法（その 2）

13.2 橋脚の水平保有耐力と変形性能

例題 13.2-1　エネルギー一定則（その 1）（道示関連：耐震設計編，レベル 2 地震動に対する耐震性能の照査）

道路橋示方書，耐震設計編では，レベル 2 の地震時の耐震性能の照査において，構造部材の塑性化を許容するために，構造物補正係数 C_S 以下のように規定されている．

$$C_S = \frac{1}{\sqrt{2\mu_a - 1}} \tag{13.2-1-1}$$

ここに，μ_a ：完全塑性型の復元力特性を有する構造系の許容塑性率であり，その値は別途定められている．

ところで，式(13.2-1-1)の誘導過程と意義について述べよ．

解答

道路橋示方書耐震設計編では，レベル 2 地震動（タイプ 1）の設計水平震度は以下のように与えられている．

$$k_{hc} = C_S C_z k_{hc0} \tag{13.2-1-2}$$

ここに，C_S ：構造物補正係数，C_z ：地域別補正係数，k_{hc0} ：設計水平震度の標準値である．C_S は構造部材の塑性化に伴う低減係数であり，橋脚を完全塑性体としてモデル化したときの応答特性から決定されている．すなわち，図 13.2-1-1 に示すように，橋脚が線形弾性体とした場合の最大応答変位を δ_E とし，橋脚を完全塑性体とした場合の最大応答変位を δ_P とすれば，もし地震時に橋脚で吸収されるエネルギー（ひずみエネルギー）が一定と仮定すれば，面積 O-A-E と面積 O-Y-D-P が同一となり，

$$\frac{1}{2}(P_E - P_Y)(\delta_E - \delta_Y) = P_Y(\delta_P - \delta_E) \tag{13.2-1-3}$$

塑性率 μ を以下のように定義し，

$$\mu = \frac{\delta_P}{\delta_Y} \tag{13.2-1-4}$$

上の 2 式より，

$$\frac{P_Y}{P_E} = \frac{\delta_Y}{\delta_E} = \frac{1}{\sqrt{2\mu - 1}} \tag{13.2-1-5}$$

となり，橋脚の保有水平耐力を失わない範囲の許容できる塑性率を μ_a とすれば，最大弾性応答荷重 P_E と塑性荷重 P_Y の比は

$$C_S = \frac{P_Y}{P_E} = \frac{1}{\sqrt{2\mu_a - 1}} \tag{13.2-1-6}$$

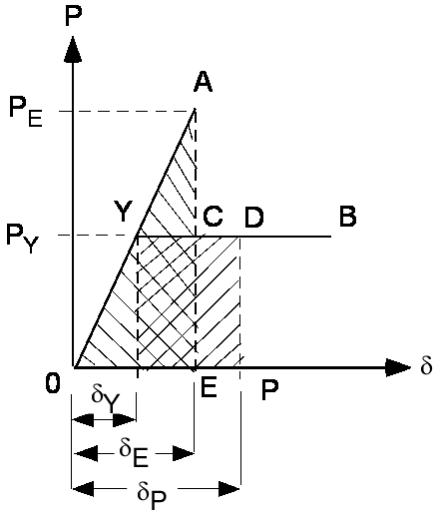


図 13.2-1-1 エネルギー一定則

となる．

したがって，式(13.2-1-2)の k_{hc0} は弾性応答値から求め，塑性化の影響を低減係数として考慮したものが C_S である．

式(13.2-1-3)はエネルギー一定則と呼ばれている．もちろん，地震時の振動系では入力エネルギーは運動エネルギーとひずみエネルギーの和であり，弾塑性応答では固有周期が変化し，式(13.2-1-3)のようなひずみエネルギーに関する一定則は成立しないので，あくまでも式(13.2-1-2)は設計のための近似的な取り扱いであることを付記しておく．

例題 13.2-2　エネルギー一定則（その 2）（道示関連：耐震設計編，レベル 2 地震動に対する耐震性能の照査）

道路橋示方書耐震設計編，鉄筋コンクリート（RC）橋脚の耐震性能の照査の項において，単柱式 RC 橋脚ならびに 1 層式 RC ラーメン橋脚は，地震時保有水平耐力（P_a）と許容残留変位（δ_R）に関して次式

が規定されている．

$$k_{hc0}W \le P_a$$
$$\delta_R \le \delta_{Ra} \qquad (13.2\text{-}2\text{-}1)$$

ここに，

$$\delta_R = C_R(\mu_R - 1)(1-r)\delta_y$$
$$\mu_r = 0.5\left[(c_z k_{hc0} W / P_a)^2 + 1\right] \qquad (13.2\text{-}2\text{-}2)$$

k_{hc0} ：レベル２地震動の設計水平震度の標準値

W ：上部工等価重量

P_a ：地震時保有水平耐力

C_R ：残留変位補正係数で，鉄筋コンクリート橋脚では 0.6 とする．

r ：橋脚の降伏剛性に対する降伏後の 2 次剛性の比で，鉄筋コンクリート橋脚では 0 とする．

δ_y ：降伏変位

C_z ：地域別補正係数

δ_{Ra} ：橋脚の許容残留変位

式(13.2-2-2)の誘導過程について説明せよ．

解答

図 13.2-2-1 に示すように，橋脚先端の水平力 (P_a) と水平変位 (δ) の関係において，最大弾性応答値を k_{hc0}，完全塑性体としたときの応答値を P_a とすれば，エネルギー一定則より，

$$(k_{hc0}W - P_a) \times \delta_a / 2 = P_a \times \delta_b \qquad (13.2\text{-}2\text{-}3)$$

一方，

$$p_a / \delta_y = (k_{hc0}W - P_a) / \delta_a \qquad (13.2\text{-}2\text{-}4)$$

塑性率の定義は

$$\mu_r = \frac{\delta_y + \delta_R}{\delta_y} \qquad (13.2\text{-}2\text{-}5)$$

よって，

$$\delta_R = \delta_y(\mu_r - 1) \qquad (13.2\text{-}2\text{-}6)$$

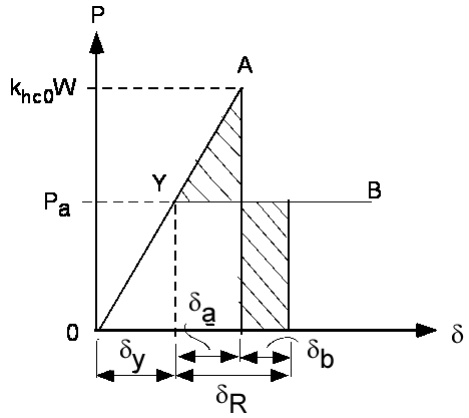


図 13.2-2-1　橋脚の弾塑性応答変位

一方，式（13.2-2-3）および式(13.2-2-4)より

$$\delta_a = \delta_y(k_{hc0}W - P_a)/P_a$$
$$\delta_b = \delta_y(k_{hc0}W - P_a)^2/(2P_a{}^2) \qquad (13.2\text{-}2\text{-}5)$$

したがって，

$$\mu_r = (\delta_y + \delta_a + \delta_b)/\delta_y = 1 + (\delta_a + \delta_b)/\delta_y$$
$$= 1 + (k_{hc0}W - P_a)/P_a + (k_{hc0}W - P_a)^2/(2P_a{}^2)$$
$$= \frac{1}{2}\left[(k_{hc0}W/P_a)^2 + 1\right] \qquad (13.2\text{-}2\text{-}6)$$

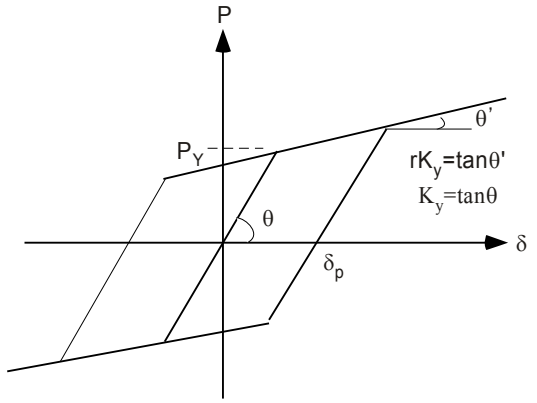


図 13.2-2-2　一般的な橋脚の $P-\delta$ モデル

前例題で述べたように厳密にはひずみエネルギー一定則は成立せず，式(13.2-2-6)の残留変位は過大な値を与える．そこで，1 自由度系の振動モデルの弾塑性応答計算により修正が行われている．

すなわち，図 13.1-1-3 の 1 自由度系のモデルにおいて，図 13.2-2-2 に示す橋脚の降伏剛性が K_y，降伏後の剛性が rK_y であるモデルを用い，過去の震度 6 以上の地震記録波を入力し，最大応答変位についての応答スペクトルを調べたところ，最大応答残留変位は固有周期および降伏前後の剛性比 r に大きく影響され，式（13.2-2-6）はつぎのように修正されている．

$$\delta_R = C_R(\mu_R - 1)(1-r)\delta_y \qquad (13.2\text{-}2\text{-}7)$$

なお，RC 橋脚の場合は，完全塑性モデル（r=0）とし，$C_R = 0.6$ 程度であることが判明している．

例題 13.2-3　固有周期の算定（その 1）（道示関連：耐震設計編，固有周期の算定）

道路橋示方書, 耐震設計編, 固有周期の算定での次式の根拠を示せ.

$$T = 2.01\sqrt{\delta} \qquad (13.2\text{-}3\text{-}1)$$

ここに，T ：設計振動単位の固有周期（s）

δ :耐震設計上の地盤面より上にある下部構造の重量の 80%と，それが支持している上部構造部分の全重量に相当する慣性力の作用方向に作用させた場合の上部構造の慣性力の作用位置における変位（m）

解答

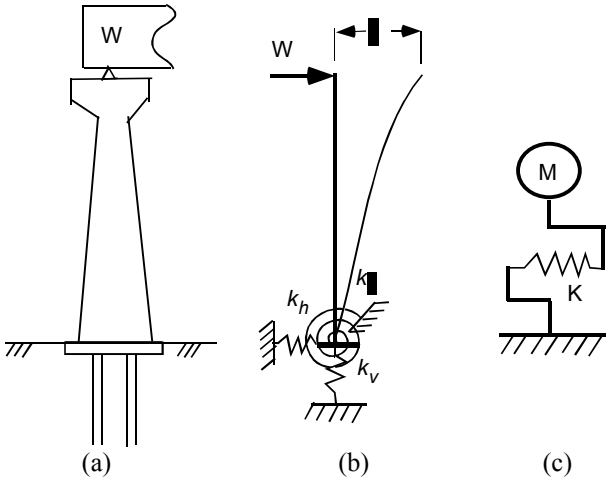


図 13.2-3-1　橋脚への地震力の作用

式(13.2-3-1)は，図 13.2-3-1(a)に示すような橋脚が上部工の荷重 W を受ける場合の固有周期を 1 自由度系の振動問題として略近的に与えたものである．本来，橋脚の変形および基礎の変形を含めた振動問題は図 13.2-3-1(b)に示すような多自由度系になるがので，問題を単純化するためには，図 13.2-3-1 (c)に示す 1 自由度系におき直すには等価質量 M および等価剛性 k を評価しなければならない．等価質量 M は振動モードに依存するが，式(13.2-3-1)では図 13.2-3-1(b)に示すような橋脚上端に水平荷重が作用するときの静的たわみを用い，橋脚に作用する上部工の重量 W に下部工の重量 $\sum w_i$ の 80%を加えたものを，すなわち

$$M = (W + 0.8\sum w_i)/g \qquad (13.2\text{-}3\text{-}2)$$

ここに，g ：重力加速度(9.8m/s^2)，を等価質量とする．等価剛性 k は，図 5.2-3-1(b)に示すように，橋脚上端に集中水平荷重 Mg が作用した時の静的たわみ δ とし，

$$k = \frac{Mg}{\delta} \qquad (12.3\text{-}3\text{-}3)$$

としている．すると，周知の非減衰の 1 自由度系の固有周期の算定式は以下のようになる．

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta}{g}} \cong 2.01\sqrt{\delta} \qquad (12.3\text{-}3\text{-}4)$$

なお，δ の算定には，レベル 1 地震動では橋脚の全断面剛性を，レベル 2 地震動には橋脚の降伏剛性を用いるとされている．

例題 13.2-4　固有周期の算定（その 2）（道示関連：耐震設計編，固有周期の算定）

道路橋示方書（耐震設計編），固有周期の算定での次式の根拠を示せ.

$$T = 2.01\sqrt{\delta} \qquad (13.2\text{-}4\text{-}1)$$

$$\delta = \frac{\int w(s)u(s)^2 ds}{\int w(s)u(s)ds} \tag{13.2-4-2}$$

ここに，T ：設計振動単位の固有周期（s）

w(s)：上部構造及び下部構造の位置(s)における重量(kN/m)

u(s)：上部構造及び耐震設計上も地盤面より上の下部構造の重量に相当する水平力を慣性力の作用方向に作用させた場合にその方向に生じる位置 s における変位(m)

なお，積分は設計振動単位全体にわたって実行される．

解答

基本的には前例題と同じであるが，設計振動単位が複数の下部構造とそれが支持している上部構造からなる場合には，下部構造の慣性力の影響が大きくなるために，この影響を考慮する必要がある．ここでは，上部構造の集中重量の他に下部構造の重量分布を慣性力の作用方向（通常は水平方向）に与えた時の静的変位 u(s)を算定し，これを近似の振動モードと仮定し，レイリー(Raylegh)の方法により固有周期を求めたものである．すなわち，１自由度系の振動変位は

$u(s,t) = u(s)\sin\omega t$，ここに，$u(s)$ ：振動モード，ω ：角速度である．

非減衰振動中の運動エネルギーとひずみエネルギーの和が常に一定であることにより，運動エネルギーの最大値 $V_{\max}$ と最大ひずみエネルギー $U_{\max}$ が同じなる．すなわち，

$$V_{\max} = \frac{1}{2g}\int w(s)\left(\frac{\partial u(s,t)}{\partial t}\right)^2_{\max} ds = \frac{\omega^2}{2g}\int w(s)u(s)^2 ds \tag{13.2-4-3}$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\int w(s)u(s)ds$$

よって，$V_{\max} = U_{\max}$ および $\omega \mathrm{T} = 2\pi$ の関係より，

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}\cdot\frac{\int w(s)u(s)^2 ds}{\int w(s)u(s)ds}} \cong 2.01\sqrt{\frac{\int w(s)u(s)^2 ds}{\int w(s)u(s)ds}} \tag{13.2-4-4}$$

となる．なお，最大ひずみエネルギーは次式よりも求められる．

$$U_{\max} = \frac{1}{2}\int \frac{M(s)^2}{EI} ds \tag{13.2-4-5}$$

ここに，EI ：位置 s での曲げ剛性，$M(s)$ ：位置 s での曲げモーメントである．

例題 13.2-5　RC 橋脚の保有水平耐力（道示関連：耐震設計編，水平耐力及び水平変位の算出）

図 13.2-5-1 に示すような鉄筋コンクリート（RC）橋脚の上部工重量 W の作用点で水平力 $P = kW$，k ：

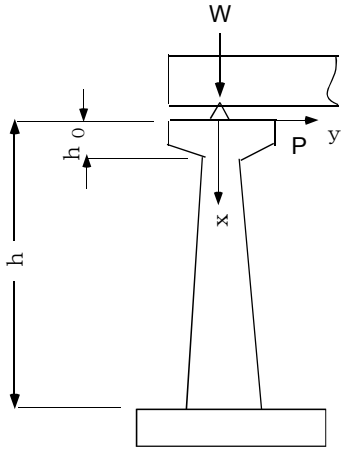


図 13.2-5-1 RC 橋脚

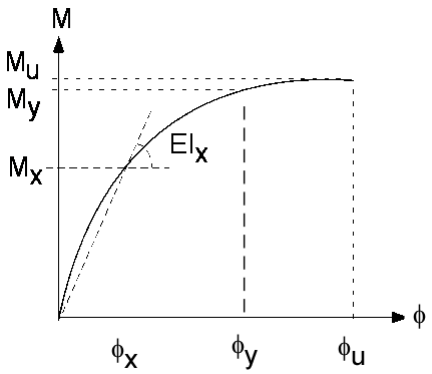


図 13.2-5-2 曲げモーメント・曲率関係

設計震度，が作用したときの水平変位 δ_h を求めよ．ただし，橋脚は変断面とし，曲げモーメント（M_x）

と曲率（ϕ_x）の関係は次式で与えられるような非線形関係（図 13.2-5-2 参照）にあるとする．

$$M_x = f(\phi_x) \quad \text{または} \quad \phi_x = g(M_x) \tag{13.2-5-1}$$

ここに，関数 f と g は互いに逆関数の関係にある．

解答

水平荷重 P の作用点から距離 x にある断面での曲げモーメントは $M_x = Px$ であるので，

$$\phi_x = g(Px) \tag{13.2-5-2}$$

仮想力法（補仮想仕事の原理）により，荷重点の水平変位は

$$\delta = \int_{h_0}^{h} \phi_x \overline{M} dx = \int_{h_0}^{h} g(Px) x dx \tag{13.2-5-3}$$

ここに，$\overline{M}$ ： $P=1$ による仮想曲げモーメント，また頂版部分（$0 \le x \le h_0$）は剛域として取り扱っている．橋脚下端が降伏モーメント M_y に達するときの水平変位，すなわち降伏変位は

$$\delta_y = \int_{h_0}^{h} g\left(\frac{M_y}{h} x\right) x dx \tag{13.2-5-4}$$

関数 g が陽に与えられないときには，図 13.2-5-2 に示すような割線曲げ剛性（EI_x）を用いて，

$$\delta_y = P \int_{h_0}^{h} \frac{x^2}{EI_x} dx \tag{13.2-5-5}$$

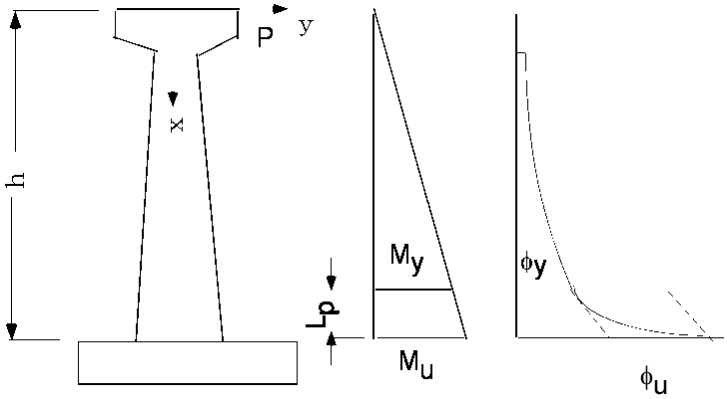
最初に仮定した EI_x を用いて上式の反復計算での収束値によって δ_y が決定できる．

道路橋示方書（耐震設計篇）の**解 10. 3. 6** では，橋脚高さを n 分割し（ただし $h_0 = 0$），各分割点の断面での曲率を計算し，台形則を用いた数値積分によって δ_y を算定する方法を推奨している．すなわち，

$$\delta_y = \int \phi x dx = \sum_{i=1}^{n} (\phi_i x_i + \phi_{i-1} x_{i-1}) \Delta x_i / 2 \tag{13.2-5-6}$$

ここに，Δx は分割区間長であり，信頼できる精度を得るには n=50 程度に取ることが必要と言われている．

一方，橋脚下端の曲げモーメントが降伏モーメント M_y を越え，終局モーメント M_u に至る場合には，



(a) RC 橋脚　　(b) 曲げモーメント　　(c) 曲率

図 13.2-5-3 終局限界状態での曲げモーメントおよび曲率

塑性領域が橋脚下端に集中し，曲げモーメントがほとんど変化せず曲率のみが急速に増大する．このような現象を巨視的に塑性ヒンジが発生したとしてモデル化し，塑性変形が集中する区間を塑性ヒンジ長 L_p とみなすことができる．理論的には L_p は，図 13.2-5-3 に示すように，M_y と M_u の間隔，すなわち

$$L_p = \left(1 - \frac{M_y}{M_u}\right) h \tag{13.2-5-7}$$

であるが，実際の橋脚下端の鉄筋のフーチングからの抜け出しや鉄筋の座屈の影響もあり，道路橋示方書では実験データを統計的に処理し次式で与えている．

$$L_p = 0.2h - 0.1D\text{，ただし}\ 0.1D \le L_p \le 0.5D \tag{13.2-5-8}$$

ここに，D：断面高さである．

したがって，終局限界状態での水平変位δ_uは，橋脚下端が塑性モーメントに達した降伏変位δ_yに塑性ヒンジの回転θ_pの影響を加えて以下のように与えられる．

$$\delta_u = \delta_y + (h - L_p/2)\theta_p \tag{13.2-5-9}$$

ここに，

$$\theta_p = (\phi_u - \phi_y)L_p \tag{13.2-5-10}$$

である．

例題 13.2-6　RC 断面のモーメント－曲率関係（道示関連：耐震設計編，RC 橋脚）

図 13.2-6-1 に示すような，複鉄筋長方形断面部材が一定軸圧縮力（N_0）を受けているときの曲げモーメント（M）と曲率（ϕ）の関係を算定する一般的方法について述べよ．ただし，ひずみ分布に関する平面保持の仮定にしたがい，コンクリートおよび鉄筋の応力・ひずみ関係は，道路橋耐震設計編によるもので，それらを次式で表すものとする．

コンクリート：$\sigma_c = f_c(\varepsilon_c)$　(13.2-6-1)

鉄筋：$\sigma_s = f_s(\varepsilon_s)$　(13.2-6-2)

ここに，f_c，f_sは図 13.2-6-2 および図 13.2-6-3 に示す応力・ひずみ関係を与える非線形関数である．

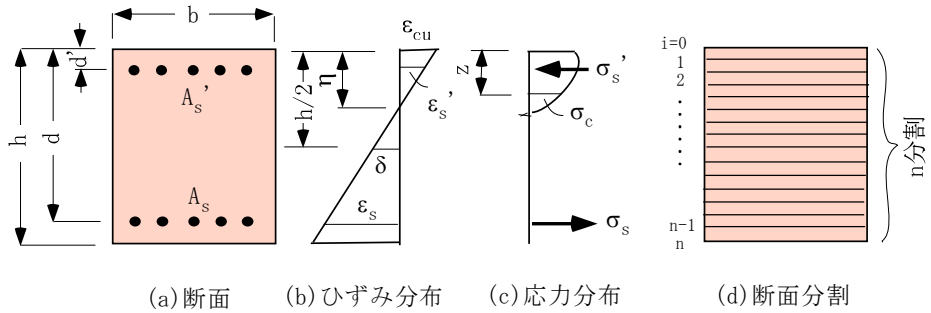


図 13.2-6-1　複鉄筋長方形断面

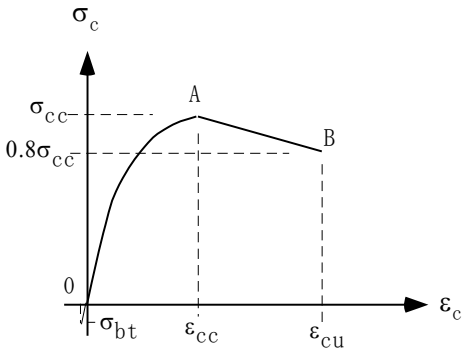


図 13.2-6-2　コンクリートの応力・ひずみ曲線

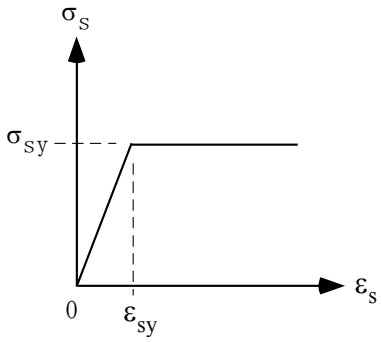


図 13.2-6-3　鉄筋の応力・ひずみ曲線

解答

図 13.2-6-1(b)に示すように，平面保持の仮定により，上縁から距離 z の位置でのコンクリートのひずみ，ただし引張を正，は

$$\varepsilon_c = (z - \eta)\phi \tag{13.2-6-3}$$

ここに，ϕ：曲率であり，引張鉄筋および圧縮鉄筋のひずみは

$$\varepsilon_s = (d - \eta)\phi, \quad \varepsilon_s' = (d' - \eta)\phi \tag{13.2-6-4}$$

ここに，η：上縁から中立軸までの距離，φ：曲率，ひずみは圧縮を正としている．断面に作用する軸力をNおよび断面中心に関する曲げモーメントをMとすれば，つり合い条件式により

$$N = b\int_0^h \sigma_c dz + A_s\sigma_s + A_s'\sigma_s'$$
$$= b\int_0^h f_c(\varepsilon_c)dz + A_s f_s(\varepsilon_s) + A_s' f_s(\varepsilon_s') \qquad (13.2\text{-}6\text{-}5)$$

$$M = b\int_0^h (\frac{h}{2}-z) f_c(\varepsilon_c)dz + (\frac{h}{2}-d)A_s f_s(\varepsilon_s) + (\frac{h}{2}-d')A_s' f_s(\varepsilon_s') \qquad (13.2\text{-}6\text{-}6)$$

上式の積分を数値的に行うために，図 13.2-6-1(d)に示すように，コンクリート断面を微小間隔$\Delta z = h/n$でn分割し，つぎのように与える．

$$N = b\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f_c(\varepsilon_{ci})\Delta z + A_s f_s(\varepsilon_s) + A_s' f_s(\varepsilon_s') \qquad (13.2\text{-}6\text{-}7)$$

$$M = b\sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\frac{h}{2}-z_i) f_c(\varepsilon_{ci})\Delta z + (\frac{h}{2}-d)A_s f_s(\varepsilon_s) + (\frac{h}{2}-d')A_s' f_s(\varepsilon_s') \qquad (13.2\text{-}6\text{-}8)$$

$\varepsilon_{ci} = (z_i - \eta)\phi$, $\varepsilon_s = (d-\eta)\phi$, $\varepsilon_s' = (d'-\eta)\phi$, $z_i = i\Delta z$, i=0, 1, 2, ⋯, n.

ここに，α_i：数値積分の重み係数で，台形公式を用いれば，
$\alpha_0 = \alpha_n = 0.5, \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots\cdots = \alpha_{n-1} = 1.0$ である．

さて，$M-\phi$ 曲線を求めるためには，ϕを微小間隔$\Delta\phi$に分割し，図 13.2-6-4 のフローチャートに従い反復計算する．すなわち，曲率ϕは微小間隔$\Delta\phi$のステップで順次増加させ，各ステップでのϕの下で，$d' \le \eta \le h/2$ の範囲内でηを微小間隔$\Delta\eta$ごとに変化させ，式（13.2-6-7）のNを求め，与えられたN_0との差が許容誤差以内になるまで反復計算しηの値を決定する．つぎに，決定されたηを用い，式(13.2-6-8)により，Mの値を求め，ϕを$\Delta\phi$だけ増加させ同じ計算を繰り返す．このような手順で曲げモーメント・曲率曲線を算定することができる．具体的な計算例については，つぎの例題で示す．

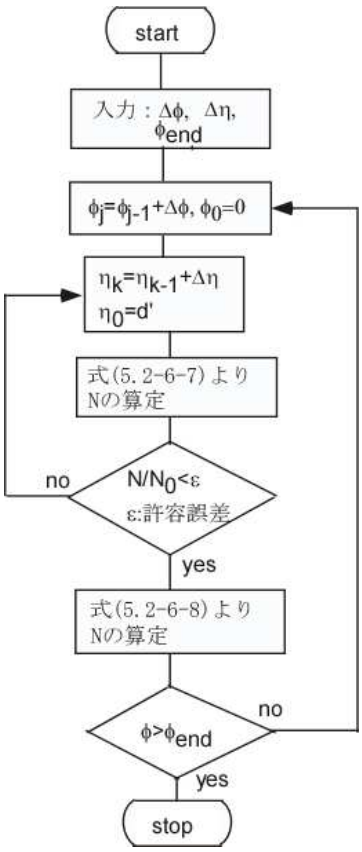


図 13.2-6-4　フローチャート

例題 13.2-7　数値解析例（道示関連：耐震設計編，RC 橋脚）

前例題の図 13.2-6-1 の複鉄筋長方形断面において，一定軸圧縮力（N_0）の下での曲げモーメント（M）と曲率（ϕ）の関係を数値解析により求め，ついでN_0の大きさと終局曲げモーメント（M_u）および終局曲率（ϕ_u）の関係を調べよ．ただし，断面寸法は$h = 80\text{cm}, b = 50\text{cm}, d = 72\text{cm},$，$d' = 8\text{cm}$とし，鉄筋量は$A_s' = A_s = 5\text{D}25 = 25.33\text{cm}^2$，コンクリートの弾性係数は$E_c = 28\text{kN/mm}^2$，鉄筋の弾性係数は$E_s = 200\text{kN/mm}^2$で，コンクリートの応力・ひずみ曲線は**図 4.1-4-3** にしたがい，設計基準強度$\sigma_{ck} = 24N/mm^2$，曲げ引張強度$\sigma_{bt} = 2.4\text{N/mm}^2$，拘束筋の体積比$\rho_s = 0.01$とし，鉄筋の応力・ひずみ曲線はバイリニア曲線で降伏強度は$\sigma_{sy} = 295\text{N/mm}^2$とする．

解答

図 13.2-6-2 において，

$$\sigma_c = E_c\varepsilon_c\left[1 - \frac{1}{n}(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}})^{n-1}\right], \quad 0 \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{cc} \text{ に対して}$$

$$\sigma_c = \sigma_{cc} - E_{des}(\varepsilon_c - \varepsilon_{cc}), \quad \varepsilon_{cc} \le \varepsilon_c \le \varepsilon_{cu} \text{ に対して}$$

ここに，

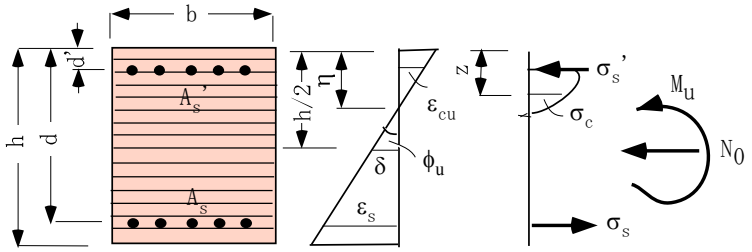
$$\sigma_{cc} = \sigma_{ck} + 3.8\alpha\rho_s\sigma_{sy} = 24 + 3.8\times0.2\times0.01\times295 = 26.2\text{N/mm}^2$$

$$\varepsilon_{cc} = 0.002 + 0.0033\beta\frac{\rho_s\sigma_{sy}}{\sigma_{ck}} = 0.002 + 0.0033\times0.4\times\frac{0.01\times295}{24} = 0.00216$$

$$E_{des} = 11.2\frac{\sigma_{ck}{}^2}{\rho_s\sigma_{sy}} = 11.2\times\frac{24^2}{0.01\times295} = 2.19\text{kN/mm}^2$$

$$\varepsilon_{cu} = \varepsilon_{cc} + \frac{0.2\sigma_{cc}}{E_{des}} = 0.00216 + \frac{0.2\times26.2}{2.19\times10^3} = 0.00455 \quad \text{（タイプ 2 の地震動）}$$

$$n = \frac{E_c\varepsilon_{cc}}{E_c\varepsilon_{cc} - \sigma_{cc}} = \frac{28\times10^3\times0.00216}{28\times10^3\times0.00216 - 26.2} = 1.76$$



(a)断面分割　(b)ひずみ分布　(c)応力分布

図 13.2-7-1　終局限界状態

一例として，一定圧縮力 $N_0 = 0.1bh\sigma_{cc}$ の下での $M-\phi$ 曲線を，図 13.2-6-4 のフローチャートにしたがって計算した結果を図 13.2-7-2 に示す．図において，拘束鉄筋内部コンクリートの最大ひずみが終局ひずみ

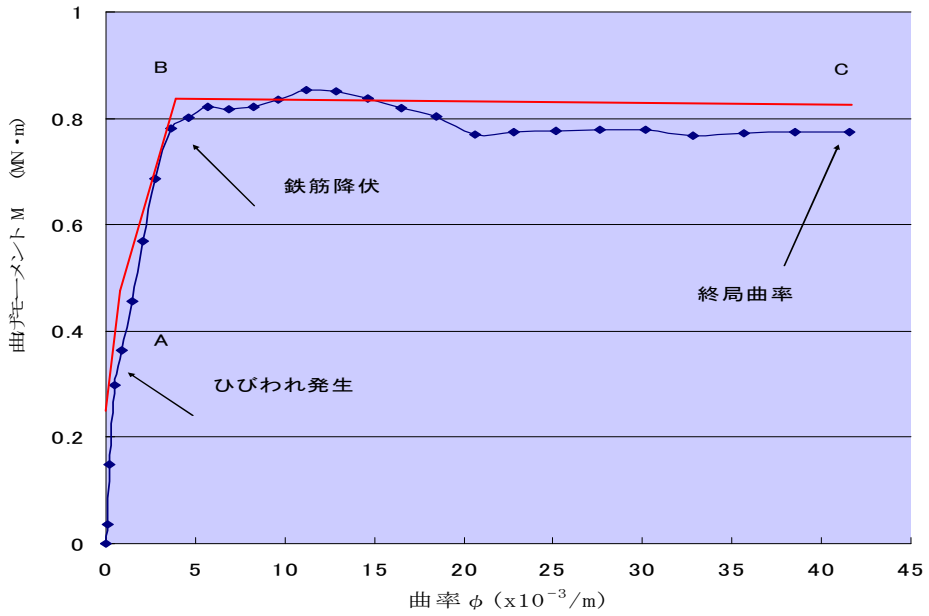


図 13.2-7-2　M－φ 曲線

ε_{cu} に達したときの終局曲率 ϕ_u までを微小曲率ごとに逐次計算した結果が示されている．$M-\phi$ 曲線はひび割れ発生時に折れ曲がり，引張鉄筋の降伏後の僅かな荷重増加で最大荷重に達し，圧縮側のかぶり部の剥落によって荷重は若干低下した後に，かぶり部の欠落した断面としての終局曲げモーメントを保持しながら終局曲率に至るが，ひびわれ発生点 A，引張鉄筋降伏開始 B，および終局曲率時 C を結ぶ直線でほぼ近似できることが分かる．なお，上記の数値計算では，コンクリート断面分割数(n)は 100 としているが，n をかなり大きく採らないと精度良い結果が得られないことを付記しておく．

つぎに，タイプ 2 の地震動での終局限界状態では，横拘束鉄筋の内部のコンクリートのひずみの最大値は

終局ひずみ$\varepsilon_{cu}=0.00455$に達しており，かぶりコンクリートが剥落した状態にある．そのときの曲率（終局曲率）は

$$\phi_u=\varepsilon_{cu}/(\eta-d')$$

であり，断面の上縁から$z_i=i\Delta z$にあるコンクリートのひずみは

$$\varepsilon_c=(\eta-z_i)\phi_u=\frac{\varepsilon_{cu}(\eta-z_i)}{\eta-d'}\phi_u$$

n=100 として，ηをd'から$h/2$まで小刻みに変化させたときの式(13.2-6-7)および式(13.2-6-8)によるNおよびMを数値計算すれば，軸圧縮力（N）と終局曲げモーメント（M_u）の関係（一般に，相関曲線と呼ばれる）は図 13.2-7-3 に，またNとϕ_uの関係は図 13.2-7-4 のように与えられる．軸圧縮力がゼロから増大するについて終局曲げモーメントが増大するが，終局軸圧縮力の 1/3 強を超えると終局曲げモーメントが減少すとことがわかる．さらに，終局曲率（ϕ_u）は軸圧縮力（N）の増大につれて急速に減少することがわかる．

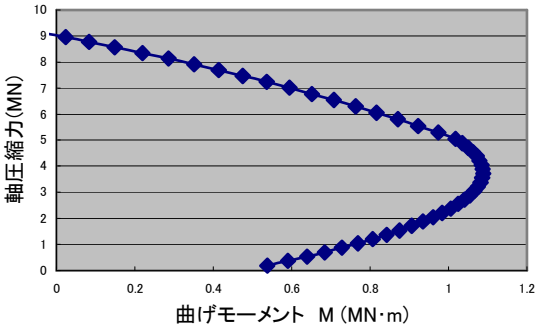


図 13.2-7-3　M_u-N 相関曲線

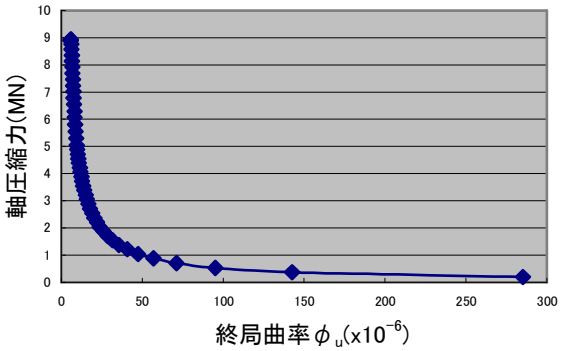


図 13.2-7-4　N-ϕ_u関係

例題 13.2-8　鋼製断面のモーメント－曲率関係（道示関連：耐震設計編，鋼製橋脚）

道路橋示方書，耐震設計編，鋼製橋脚の動的照査の項においては，動的解析に用いる非線形履歴モデルでの鋼製橋脚の曲げモーメント（M）と曲率（ϕ）の関係を図 13.2-8-1 のように与えている．ここに，M_{yc},ϕ_{yc}，M_{yt},ϕ_{yt}はそれぞれ圧縮縁，引張縁の板厚の中心のひずみが一定軸力の下で初めて降伏ひずみに達するときの曲げモーメントおよび曲率であり，M_a,ϕ_aは圧縮縁の板厚の中心が圧縮限界ひずみ（ε_a）

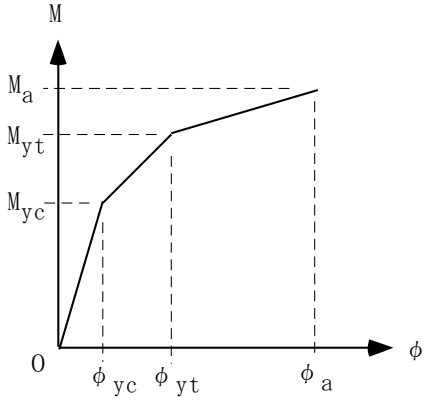


図 13.2-8-1　$M-\phi$曲線

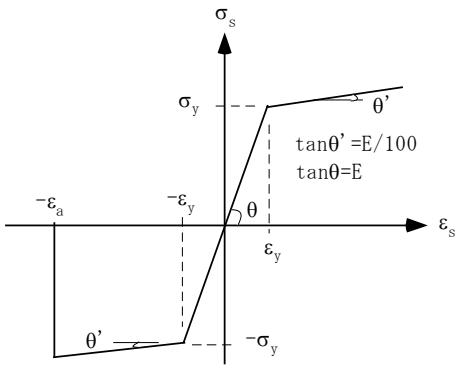


図 13.2-8-2　鋼材の応力・ひずみ関係

に達するときの曲げモーメントおよび曲率である．それらの値は図 13.2-8-2 の応力・ひずみ曲線を用い，平面保持の仮定にしたがって算定するとされている．　なお，矩形断面では，$\varepsilon_a/\varepsilon_y=20-25R_F$，ただし$\varepsilon_y$：降伏ひずみ，$R_F$：フランジの幅厚比パラメータで，道路橋示方書，鋼橋編において以下のように与えられている

$$R_F = \frac{b}{t}\sqrt{\frac{\sigma_y}{E}\cdot\frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k_F}} \qquad (13.2\text{-}8\text{-}1)$$

ただし R_F の最小値は 0.5，ここに，k_F は座屈係数で，

$$k_F = \frac{(1+\alpha^2)^2 + n\gamma_i}{\alpha^2(1+n\delta_i)}, \quad (\alpha \le \alpha_0 \text{ に対して}) \qquad (13.2\text{-}8\text{-}2)$$

$$k_F = \frac{2(1+\sqrt{1+n\gamma_i})}{1+n\delta_i}, \quad (\alpha \ge \alpha_0 \text{ に対して}) \qquad (13.2\text{-}8\text{-}3)$$

ここに，n：補剛材で区切られたパネル数，γ_i：縦方向補剛材の剛比（$=11I_l/bt^3$），t：板厚，I_l：一本の補剛材の断面 2 次モーメント（片側補剛材の場合はフランジ板の付け根に関するもの）で，$\alpha = a/b$，a：横補剛材の間隔，b：ウエブ間隔，$\alpha_0 = \sqrt[4]{1+n\gamma_i}$，$\delta_i = A_l/bt$，$A_l$：一本の縦方向補剛材の面積である．

ところで，図 13.2-8-3 に示すような箱形断面に対して，図 13.2-8-1 の $M-\phi$ 曲線を算定する方法を示せ．ただし，軸圧縮力（N）は $0.1\sigma_y A$，ただし A は総断面積で，横補剛材の間隔は 1,000mm，弾性係数（E）は 200 k N/mm^2 とし，降伏応力（σ_y）は 235N/mm^2 とする．

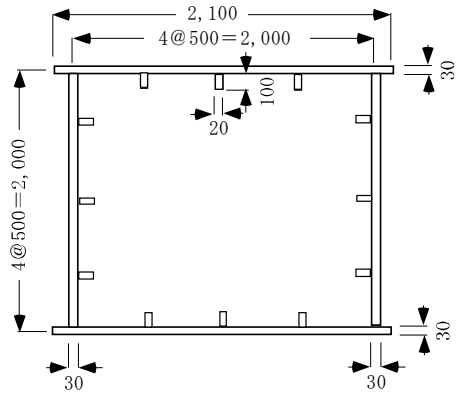


図 13.2-8-3　箱形断面

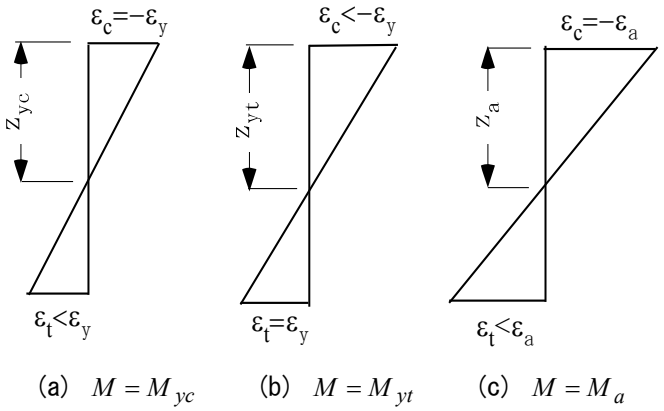


図 13.2-8-4　断面内のひずみ分布

解答

$\varepsilon_y = \sigma_y / E = 1.175\times10^{-3}$，b＝2,000mm, t=30mm, n=4，$A_l = 2{,}000\text{mm}^2$，$I_l = 20\times100^3/3 = 6.67\times10^6\,\text{mm}^4$，$\delta_i = 0.03$, $\gamma_i = 8.5$ であるので，$\alpha = 0.48$，$\alpha_0 = 2.43$，$k_F = 4.40$．よって，$\nu = 0.3$ として，$R_F = 0.38 < 0.5$ より，$R_F = 0.5$ $\varepsilon_a = 7.5\varepsilon_y = 7.5\times1.175\times10^{-3} = 0.0981$ となる．

平面保持の仮定により，曲げモーメントがそれぞれ M_{yc}, M_{yt}, M_a に達するときの断面内のひずみ分布は図 5.2-8-4 のようになり，各時点での曲率は，$\phi_{yc} = \varepsilon_y / z_{yc}, \phi_{yt} = \varepsilon_y /(h - z_{yt}), \phi_a = \varepsilon_a /(h - z_a)$，ただし h：断面高さ（=2,030mm），である．

したがって，断面の上縁から距離 z の位置でのひずみは，それぞれの曲率と距離 $z - z_{yc}, z - z_{yt}, z - z_a$ の積で与えられるので，図 13.2-8-2 の応力・ひずみ曲線を $\sigma_s = f[\varepsilon_s]$ とすれば，軸力に関するつり合い条件は以下のように表せる．

$$\int_A f[\phi_{yc}(z - z_{yc})]dA = N, \int_A f[\phi_{yt}(z - z_{yt})]dA = N, \int_A f[\phi_{yc}(z - z_a)]dA = N \qquad (13.2\text{-}8\text{-}4)$$

一方，各時点のモーメントは

$$M_{yc} = \int_A (z - h/2) \cdot f[\phi_{yc}(z - z_{yc})]dA,$$

$$M_{yt} = \int_A (z - h/2) \cdot f[\phi_{yt}(z - z_{yt})]dA, \qquad (13.2\text{-}8\text{-}5)$$

$$M_a = \int_A (z - h/2) \cdot f[\phi_{yc}(z - z_a)]dA$$

総断面積は $A = 268{,}200\text{mm}^2$ であるので，$N = -6.30\text{MN}$ となる．**例題 13.2-7** と同様，数値積分のために，断面を高さ方向に微小分割し，各分割点での $\sigma_{si} = f[\varepsilon_{si}]$ を求め，式（13.2-8-1）から反復・収束計算によってそれぞれ z_{yc}, z_{yt}, z_a を求め，同様の数値積分によって式(13.2-8-2)から，M_{yc}, M_{yt}, M_a と求めることができる．具体的には，ウエブ高さを 50 分割して，**例題 13.2-7** で説明した台形公式を用いて数値積分した結果，以下の値が得られる．

$M_{yc} = 31.9\text{MN}\cdot\text{m}$，$\phi_{yc} = 1.01\times10^{-3}/\text{m}$，

$M_{yt} = 37.4\text{MN}\cdot\text{m}$，$\phi_{yt} = 1.72\times10^{-3}/\text{m}$

$M_a = 41.6\text{MN}\cdot\text{m}$，$\phi_a = 1.78\times10^{-3}/\text{m}$

上記の値より，図 13.2-8-1 の曲げモーメント・曲率曲線を求めれば図 13.2-8-5 を得る．

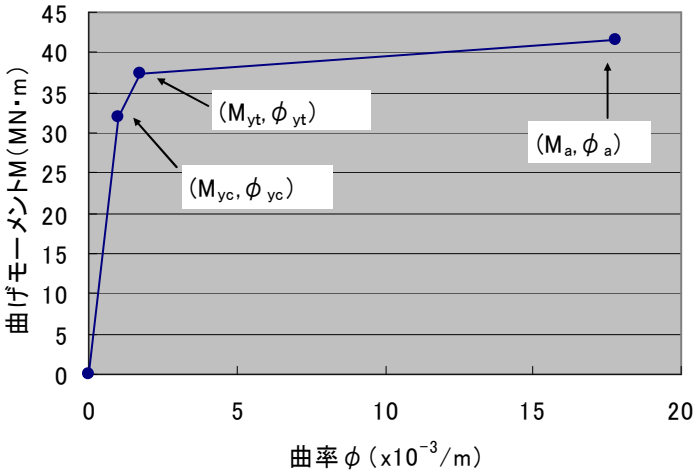
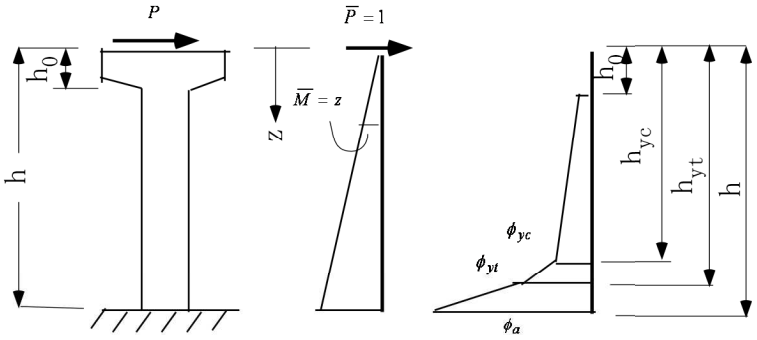


図 13.2-8-5　曲げモーメント・曲率曲線

例題 13.2-9　鋼製橋脚の保有水平耐力（道示関連：耐震設計編，鋼製橋脚）

図 13.2-9-1(a)に示す鋼製橋脚が図 13.2-8-3 の断面形を持ち，曲げモーメント(M)と曲率(ϕ)の関係が図 13.2-8-1 のように与えられたとき，頂版の上部に水平荷重 P を受けたとき荷重作用位置での水平変



(a) 橋脚　　(b) $\bar{M}$ -図　　(c) ϕ-図

図 13.2-9-1　鋼製橋脚の水平変位解析($Ph = M_a$ のとき)

位δの計算法を示し，$P-\delta$曲線を描け．ただし，橋脚高さと頂版厚が$h=15\text{m}, h_0=1\text{m}$で，頂版部($0 \le z \le h_0$)は剛と見なすものとする．

解答

頂版の上部より下方にzを採ると，zの位置での曲げモーメントは$M=Pz$，ただしモーメントは時計方向のものを正と仮定，また仮想荷重$\overline{P}=1$による曲げモーメントは$\overline{M}=z$である（図 13.2-9-1(b)参照）．　図 13.2-8-1 より，zの位置での曲率は，図 13.2-9-1(c)に示すように，終局限界状態である$Ph=M_a$のときは

$0 \le z \le h_0$では，　$\phi=0$

$h_0 \le z \le h_{yc}$では，　$\phi=\phi_{yc}\dfrac{z}{h_{yc}}$

$h_{yc} \le z \le h_{yt}$では，　$\phi=\phi_{yc}+\dfrac{(\phi_{yt}-\phi_{yc})(z-h_{yc})}{h_{yt}-h_{yc}}$

$h_{yt} \le z \le h$では，　$\phi=\phi_{yt}+\dfrac{(\phi_a-\phi_{yt})(z-h_{yt})}{h-h_{yt}}$

仮想力の原理より，荷重作用点の終局水平変位は

$$\delta_u=\int_{h_0}^{h}\phi\overline{M}dz=\frac{\phi_{yc}}{h_{yc}}\int_{h_0}^{h_{yc}}z^2dz+\phi_{yc}\int_{h_{yc}}^{h_{yt}}zdz+\frac{\phi_{yt}-\phi_{yc}}{h_{yt}-h_{yc}}\int_{h_{yc}}^{h_{yt}}z(z-h_{yc})dz$$
$$+\phi_{yt}\int_{h_{yt}}^{h}zdz+\frac{\phi_a-\phi_{yt}}{h-h_{yt}}\int_{h_{yt}}^{h}z(z-h_{yt})dz \qquad (13.2\text{-}9\text{-}1)$$

ここに，$h_{yc}=M_{yc}/P, h_{yt}=M_{yt}/P$であり，式(13.2-9-1)の積分は解析的に実行できる．

つぎに，$Ph<M_a$のときは，式(13.2-9-1)は以下のように変更される．

(1) $M_{yt} \le Ph < M_a$のとき，

$$\delta=\frac{\phi_{yc}}{h_{yc}}\int_{h_0}^{h_{yc}}z^2dz+\phi_{yc}\int_{h_{yc}}^{h_{yt}}zdz+\frac{\phi_{yt}-\phi_{yc}}{h_{yt}-h_{yc}}\int_{h_{yc}}^{h_{yt}}z(z-h_{yc})dz$$
$$+\phi_{yt}\int_{h_{yt}}^{h}zdz+\frac{\overline{\phi}_a-\phi_{yt}}{h-h_{yt}}\int_{h_{yt}}^{h}z(z-h_{yt})dz \qquad (13.2\text{-}9\text{-}2)$$

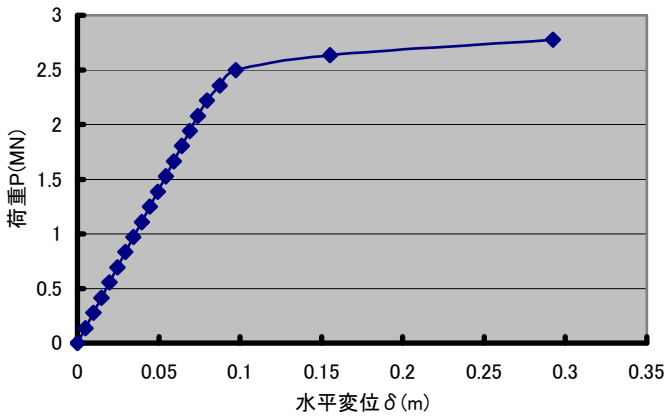


図 13.2-9-2　鋼製橋脚の水平荷重・水平変位曲線

ただし，

$$\overline{\phi}_a=\frac{ph-M_{yt}}{M_a-M_{yt}}(\phi_a-\phi_{yt})+\phi_{yt} \qquad (13.2\text{-}9\text{-}3$$

(2) $M_{yc} \le Ph < M_{yt}$ のとき

$$\delta = \frac{\phi_{yc}}{h_{yc}} \int_{h_0}^{h_{yc}} z^2 dz + \phi_{yc} \int_{h_{yc}}^{h} z dz + \frac{\bar{\phi}_{yt} - \phi_{yc}}{h - h_{yc}} \int_{h_{yc}}^{h} z(z - h_{yc}) dz \tag{13.2-9-4}$$

ただし,

$$\bar{\phi}_{yt} = \frac{Ph - M_{yc}}{M_{yt} - M_{yc}} (\phi_{yc} - \phi_{yt}) + \phi_{yc} \tag{13.2-9-5}$$

(3) $Ph < M_{yc}$ のとき

$$\delta = \frac{P\phi_{yc}}{M_{yc}} \int_{h_0}^{h} z^2 dz = \frac{P\phi_{yc}}{3M_{yc}} (h^3 - {h_0}^3) \tag{13.2-9-6}$$

$h = 15\text{m}, h_0 = 1\text{m}$ の橋脚が図 13.2-8-5 の断面を持つケースについて, 式(13.2-9-1)～式(13.2-9-6)により, $P-\delta$ 曲線を計算すれば, 図 13.2-9-2 を得, 終局荷重 $P_u = 2.77\text{MN}$, 終局変位 $\delta_u = 0.292\text{m}$ となることがわかる.

例題 13.2-10　ラーメン橋脚の保有水平耐力（道示関連：耐震設計編，ラーメン橋脚）

図 13.2-10-1 橋脚が上部工から水平荷重 P を受けたときの荷重点の水平変位を求める方法を示せ．ただし，柱およびはりの曲げ剛性はそれぞれ EI_h， EI_l とし，柱の上下端およびはりの両端には塑性ヒンジが発生するとし，各ヒンジは図 13.2-10-3 に示すような曲げモーメント・回転角の関係を持つものとする．

解答

一般に，図 13.2-10-1 のような RC ラーメンの解析法としては変位法と応力法があるが，このラーメンは剛域と回転バネを持つヒンジを有する 3 次不静定系であり，不静定次数が少ない場合には応力法による方が簡便である場合が多い．ここでは応力法を用いた手法を説明する．静的基本系として，図 13.2-10-4 に示すような左柱下端が固定で，右柱下端が自由な系を考え，不静定力として自由端に水平力 X_1，鉛直力 X_2 およびモーメント X_3 を作用させる．するとつり合い条件により各塑性ヒンジ点での曲げモーメントは以下のように表される．

$$\begin{aligned} M_a &= -X_3 + h_1 X_1 - l X_2 + P(e + h - h_1) \\ M_b &= X_3 - (h - h_2) X_1 + l X_2 - P(e + h_2) \\ M_c &= X_3 - h X_1 + (l - l_1) X_2 - Pe/2 \end{aligned} \tag{13.2-10-1}$$

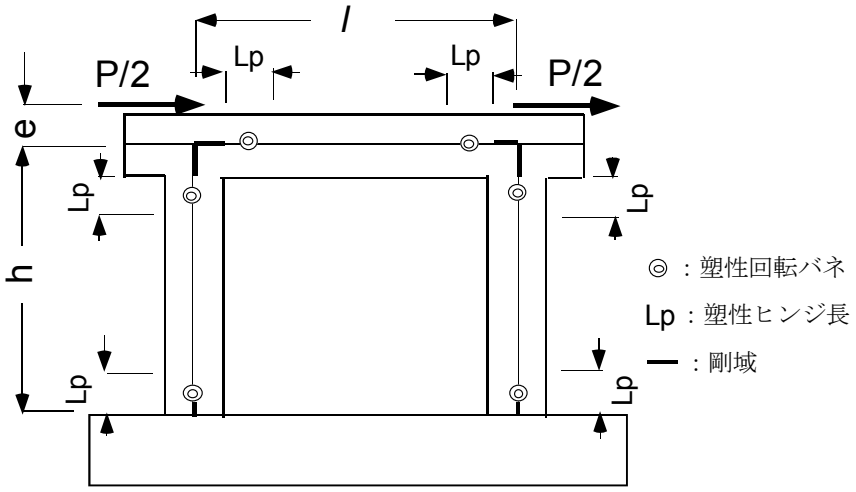


図 13.2-10-1 水平荷重を受ける RC ラーメン橋脚

$$\begin{aligned} M_d &= -X_3 + h X_1 - l_1 X_2 + Pe/2 \\ M_e &= X_3 + (h - h_2) X_1 \\ M_f &= X_3 - h_1 X_1 \end{aligned} \tag{13.2-10-2}$$

なお，上式では塑性ヒンジ点での曲げモーメントの符号は図 13.2-10-4 に示すものを正としている．
式(13.2-10-1)および式(13.2-10-2)をまとめて以下のように表示する．

$$M_r = \begin{bmatrix} a_r & b_r & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + d_r P \tag{13.2-10-3}$$

ただし，r=a,b,c,d,e,f で塑性ヒンジの位置を表す．

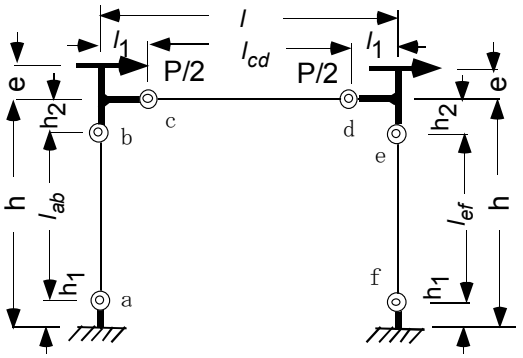


図 13.2-10-2 解析のためのスケルトン

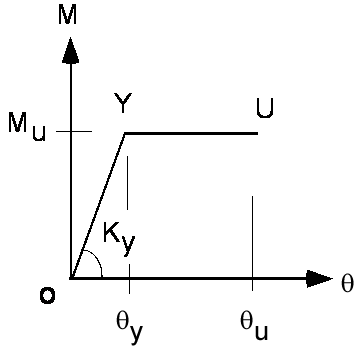


図 13.2-10-3 曲げモーメント･曲率関係

最初に，いずれの塑性ヒンジでのモーメント（M_r）も終局モーメント（M_{ur}）より小さい領域にある場合を考える．最小補仕事の原理により，

$$\int_s \frac{M_s}{EI_s}\frac{\partial M_s}{\partial X_i} ds + \sum_{\mathrm{r}} \frac{M_r}{K_{yr}}\frac{\partial M_r}{\partial X_i} = 0, \text{ ただし i=1,2,3} \tag{13.2-10-4}$$

ここに，EI_s ：部材の曲げ剛性，K_{yr} ：塑性ヒンジ r での降伏剛性で，積分は部材全長にわたって実行し，総和は塑性ヒンジについて実施する．

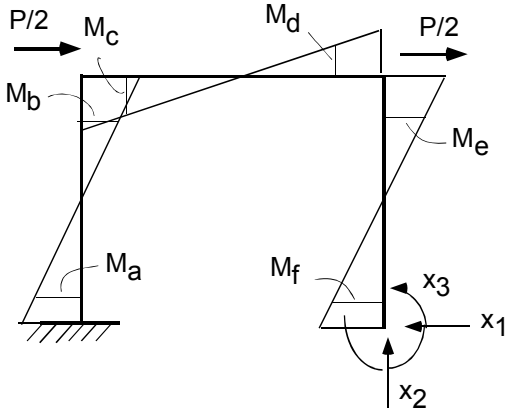


図 13.2-10-4 静定基本形と不静定力
および曲げモーメント図

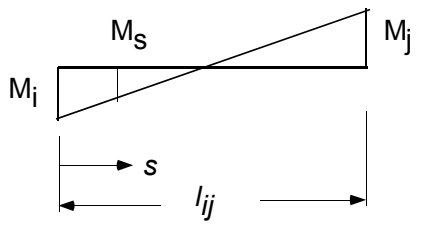


図 13.2-10-5 各部材での曲げモーメント図

さて，各部材の曲げモーメント分布は図 13.2-10-4 になるので，塑性ヒンジ間の部材 ij について以下の値を求める．

$$D_i = \int_{l_{ij}} M_s \frac{\partial M_s}{\partial X_i} ds, \quad i = 1,2,3 \qquad \text{ただし，} M_{\mathrm{s}} = \left(1 - \frac{s}{l_{ij}}\right) M_i - \frac{s}{l_{ij}} M_j \tag{13.2-10-5}$$

図 13.2-10-5 での任意点 s での曲げモーメントは

$$M_s = \mathbf{S}\mathbf{M}_{ij} \tag{13.2-10-6}$$

ここに，$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 - s/l_{ij} \end{bmatrix}$，$\mathbf{M}_{ij} = \begin{bmatrix} M_i & M_j \end{bmatrix}^t$

一方，式(13.2-10-3)を行列表示すると

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{AX} + P\mathbf{B} \tag{13.2-10-7}$$

ここに，

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}^t, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} d_i \\ d_j \end{bmatrix}$$

また，

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{ij}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{A}^t \tag{13.2-10-8}$$

であるので，式(13.2-10-5)により，$\mathbf{D}_{ij} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 \end{bmatrix}^t$ とおけば，

$$\mathbf{D}_{ij} = \mathbf{A}^t (\int_0^{l_{ij}} \mathbf{S}^t \mathbf{S} ds)\mathbf{AX} + \mathbf{A}^t (\int_0^{l_{ij}} \mathbf{S}^t \mathbf{S} ds)\mathbf{B} \cdot P \tag{13.2-10-9}$$

一方，

$$\int_0^{l_{ij}} \mathbf{S}^t \mathbf{S} ds = \int_0^{l_{ij}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{l_{ij}} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{l_{ij}} \end{bmatrix} ds = \frac{l_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{13.2-10-10}$$

であるので，

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{l_{ij}}{6} \mathbf{A}^t \mathbf{C}_0 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot P) \tag{13.2-10-11}$$

ここに，

$$\mathbf{C}_0 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

である．

一方，図 13.2-10-3 の構成関係をもつ塑性ヒンジでの曲げモーメントは，式(13.2-10-7)と同様な形式で，以下のように表せる．

$$\begin{aligned} M_r &= \begin{bmatrix} a_r & b_r & c_r \end{bmatrix} \mathbf{X} + d_r P \\ &= \mathbf{A}_r \mathbf{X} + d_r P \end{aligned} \tag{13.2-10-12}$$

したがって，いずれの塑性ヒンジにおいても終局モーメント M_{ur} を越えない範囲での系全体に対する式(13.2-10-4)は以下のように表せる．

$$\mathbf{LX} + \mathbf{R}P = 0 \tag{13.2-10-13}$$

ここに，

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \sum_{ij} \frac{l_{ij}}{6EI_{ij}} \left(\mathbf{A}^t \mathbf{C}_0 \mathbf{A} \right) + \sum_r \frac{1}{K_{yr}} \left(\mathbf{A}_r{}^t \mathbf{A}_r \right) \\ \mathbf{R} &= \sum_{ij} \frac{l_{ij}}{6EI_{ij}} \left(\mathbf{A}^t \mathbf{C}_0 \mathbf{B} \right) + \sum_r \frac{d_{r0}}{K_{yr}} \mathbf{A}_r{}^t \end{aligned} \tag{13.2-10-14}$$

上式において，ij に関する総和は，部材 ab,cd,ef についての和を意味し，r に関する総和は塑性ヒンジ a,b,c,d,e,f についての和を意味している．

式(13.2-10-13)は不静定力（X_1, X_2, X_3）に関する 3 元の連立 1 次方程式を与え，その解と式(13.2-10-3)より各塑性ヒンジでの曲げモーメント（M_r）と回転角（$\theta_r = M_r / K_{yr}$）が求められる．さらに，荷重点の水平変位（δ）は仮想力法を適用して，

$$\delta = \int \frac{M_s}{EI_s} \overline{M}_s ds + \sum_r \frac{M_r}{K_{yr}} \overline{M}_r \tag{13.2-10-15}$$

ここに，M_s, M_r は P による曲げモーメント，$\overline{M}_s, \overline{M}_r$ は $P=1$ による曲げモーメントである．式(13.2-10-7)により

$$\delta = \sum_{ij} \frac{l_{ij}}{6EI_{ij}} (\mathbf{M}_{ij}^t \mathbf{C}_0 \overline{\mathbf{M}}_{ij}) + \sum_r \frac{M_r}{K_{yr}} \overline{M_r} \tag{13.2-10-16}$$

つぎに，いずれかの塑性ヒンジ r で終局モーメント（M_{ur}）に達した後の荷重増分（ΔP）に対する解析

では，当該の塑性ヒンジでの剛性（K_{yr}）に非常に小さい正の定数を代入すれば，その逆数（$\lambda_r = 1/K_{yr}$）がペナルテー係数として演じ，式(13.2-10-13)と同様に

$$\mathbf{L}\Delta\mathbf{X} + \mathbf{R}\Delta P = 0 \tag{13.2-10-17}$$

より解析することができ，不静定力は$\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X}$，水平変位は$\delta + \Delta\delta$となる．同様の計算を反復し，式(13.2-10-15)の増分量（$\Delta\mathbf{X}$）に関する連立 1 次方程式は 3 個の塑性ヒンジで終局モーメントを越えるまで適用でき，その後は静定系になって 4 つ目の塑性ヒンジで終局モーメントに達したときに本ラーメン橋脚に崩壊メカニズムが形成される．なお，それ以前でもどこかの塑性ヒンジの回転角が終局回転角（$\theta_{ur} = L_p\phi_{ur}$）に達したときには本ラーメン橋脚はその時点で終局限界状態に達したと判定しなければならない．