# Chap. 13. 1 耐震設計（その１）

## 13. 1　１または多自由度系の振動解析に関する例題

**例題 13. 1-1　加速度応答スペクトル（道示関連：耐震設計編，設計地震動）**

加速度応答スペクトル，あるいは標準加速度応答スペクトルとは何か？　またそれらはどのようにして求められたものか？

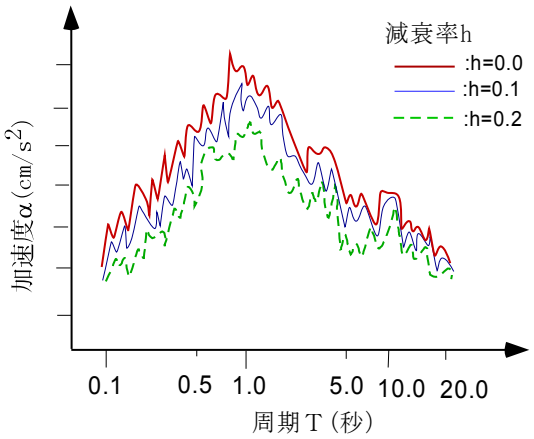


図 13.1-1-1 加速度応答スペクトル

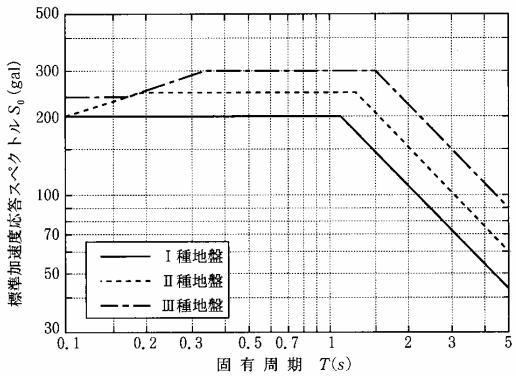


図 13.1-1-2 レベル 1 地震動の標準加速度応答スペクトル
（道路橋示方書耐震設計編による）

**解答**

特定の地震動を受けたときの構造物の応答問題を，1 自由度系の振動モデル化で簡易的に取り扱い，一定の減衰定数(h)の下で，横軸に固有周期（T）を，縦軸に最大応答変位，最大応答速度または最大応答加速度を取りグラフで表したものを変位，速度あるいは加速度応答スペクトル（応答スペクトルと総称）をいう．すなわち，構造物が受ける慣性力は加速度に質量を掛けたものであるから，加速度応答スペクトルは，特定の地震動に対して，種々の固有周期をもつ構造物が受ける最大地震力の変化を示すグラフと見ることもできる．

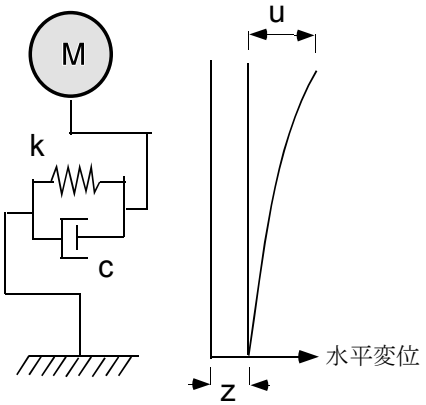


図 13.1-1-3　1 自由度系の振動モデル

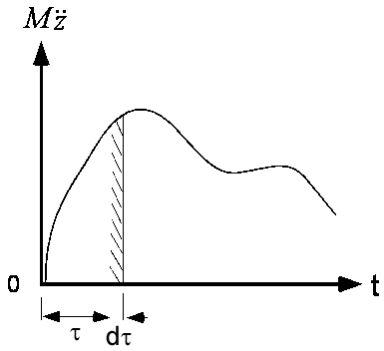


図 13.1-1-4 地震力

応答スペクトルを求めるには，図 13.1-1-3 に示すような設計基盤面に特定の地震加速度（$\ddot{z} = \partial^2 z / \partial t^2$）を受ける 1 自由度系振動問題を解かねばならない．

質量 $M$ の設計基盤面からの相対変位を $u$ とすれば，運動方程式は以下のように与えられる．

$$M(\ddot{u} + \ddot{z}) + c\dot{u} + ku = 0 \qquad (13.1\text{-}1\text{-}1)$$

ここに，$\dot{u} = du/dt, \ddot{u} = d^2u/dt^2$，$k$ は弾性剛性，$c$ は減衰係数で，この問題は図 13.1-1-3 に示すバネとダッシュポットで結合されたモデルで表される．式(13.1-1-1)を書き直せば，

$$\ddot{u} + 2hp\dot{u} + p^2 u = -\ddot{z}$$ (13.1-1-2)こ

こに$h = c/(2pM), p^2 = k/M$ で，$h$は減衰定数，$p$は円振動数である．

式(13.1-1-2)を解くに際して，まず最初に右辺をゼロとした同時方程式，すなわち自由振動方程式

$$\ddot{u} + 2hp\dot{u} + p^2 u = 0$$ (13.1-1-2)の

解を求める．この解は$u = e^{\lambda t}$ の形をとり，特性方程式は

$$\lambda^2 + 2hp\lambda + p^2 = 0$$ (13.1-1-3)で，

その根は

$$\lambda = p(-h \pm \sqrt{h^2 - 1})$$

であるので，式(13.1-1-3)の解は以下のように与えられる．

$$u = e^{-hpt}(Ae^{pt\sqrt{h^2-1}} + Be^{-pt\sqrt{h^2-1}})$$ (13.1-1-4)ここ

に A,B は積分定数で初期条件より決定される．ところで，$h \geq 1$ である場合には式(13.1-1-4)はつぎの形をとり，

$$u = e^{-hpt}(C_1 \cosh pt\sqrt{h^2 - 1} + C_2 \sinh pt\sqrt{h^2 - 1})$$ (13.1-1-4)一方，

$h < 1$ の場合には，

$$u = e^{-hpt}(C_1 \cos p_1 t + C_2 \sin p_1 t)$$ (13.1-1-5)こ

こに，$p_1 = p\sqrt{1 - h^2}$ である．すなわち，式(13.1-1-4)が示すように減衰が大きい場合（$h \geq 1$）には，変位関数は双曲線関数で表され，一様に減衰するので，$h < 1$ 時のみ式(13.1-1-5)に示すような振動を起こすことが分かり，その周期（固有周期）は

$$T' = 2\pi / p_1 = \frac{2\pi}{p}\sqrt{\frac{1}{1 - h^2}}$$ (13.1-1-6)なお，

減衰の無い（$h = 0$）の場合の固有周期は

$$T = \frac{2\pi}{p} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}$$ (13.1-1-7)

で与えられる．

つぎに，式(13.1-1-2)に示すような地震動$\ddot{z}$が作用した強制振動の解を考える．線形問題であるので，図 13.1-1-4 に示すように，時刻 t の変位応答$u(t)$を時刻$\tau$ (ただし$0 \leq \tau \leq t$)，に慣性力$M\ddot{z}$が作用したときの解の積分による方法（重ね合わせの原理）が適用できる．運動量保存則により，パルス状の力積$M\ddot{z}d\tau$は運動量の変化$Mv$，ただし$v$は速度の変化，を与えるので，時刻$\tau$に初速度$v = \ddot{z}d\tau$を与えたときの変位応答を，以下のように求める．

すなわち，式(13.1-1-5)で座標$t$を$t - \tau$に置き換えて，

$$u(t - \tau) = e^{-hp(t-\tau)}\left[C_1 \cos p_1(t - \tau) + C_2 \sin p_1(t - \tau)\right]$$ (13.1-1-8)初

期条件として，$t - \tau = 0$ で$u = 0$，$\dot{u} = v$より，

$$C_1 = 0, \quad C_2 = v / p_1$$

よって，

$$u(t - \tau) = \frac{\ddot{z}(\tau)d\tau}{p_1} e^{-hp(t-\tau)} \sin p_1(t - \tau)$$ (13.1-1-9)し

たがって，$0 < \tau \leq t$ の慣性力の重ね合わせにより

$$u(t) = \frac{1}{p_1}\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-hp(t-\tau)} \sin p_1(t - \tau)d\tau$$ (13.1-1-10)上

式の積分は Duhamel 積分（または畳み込み積分）と呼ばれている．一般に減衰定数（$h$）は小さいので，

$$p_1 \cong p = \frac{2\pi}{T}$$ (13.1-1-11)と

おけば，式(13.1-1-10)により，任意の地震加速度$\ddot{z}$による応答変位（絶対値）の最大値は固有周期$T$と減衰定数$h$が与えれば決定できる．したがって，

$$S_u(T,h)=\frac{T}{2\pi}\left|\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-h\frac{2\pi}{T}(t-\tau)}\sin\frac{2\pi}{T}(t-\tau)d\tau\right|_{\max} \qquad (13.1\text{-}1\text{-}12)$$

上式の $S_u(T,h)$ は，横軸に固有周期 $T$ をとり，縦軸に最大応答変位をとれば，各減衰率 $h$ ごとのグラフを与え，一般に応答変位スペクトルと呼んでいる．

つぎに，$p_1 \cong p$ とし，応答速度に着目すれば，式(13.1-1-9)の時間 t に関する微分により，

$$\begin{aligned} v(t-\tau) &= \ddot{z}(\tau)d\tau e^{-hp(t-\tau)}\left[-h\sin p(t-\tau)+\cos p(t-\tau)\right] \\ &= \sqrt{1+\mathrm{h}^2}\,\ddot{z}(\tau)d\tau e^{-hp(t-\tau)}\left[-\sin\varphi\sin p(t-\tau)+\cos\varphi\cos p(t-\tau)\right] \\ &= \sqrt{1+\mathrm{h}^2}\,\ddot{z}(\tau)d\tau e^{-hp(t-\tau)}\cos\left[\mathrm{p(t-\tau)}+\varphi\right] \end{aligned} \qquad (13.1\text{-}1\text{-}13)$$

ここに，$\varphi=\tan^{-1}h$ で位相角と呼ばれている．$h$ は十分小さく，すなわち $h^2 \cong 0$，かつ位相角の影響を無視すると，最大応答速度（絶対値）は以下のように与えられる．

$$S_v(T,h)=\left|\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-h\frac{2\pi}{T}(t-\tau)}\cos\frac{2\pi}{T}(t-\tau)d\tau\right|_{\max} \qquad (13.1\text{-}1\text{-}14)$$

上式の $S_v(T,h)$ は，一般に応答速度スペクトルと呼ばれている．同様に，最大応答加速度（絶対値）に着目すれば，

$$S_a(T,h)=\frac{2\pi}{T}\left|\int_0^t \ddot{z}(\tau)e^{-h\frac{2\pi}{T}(t-\tau)}\sin\frac{2\pi}{T}(t-\tau)d\tau\right|_{\max} \qquad (13.1\text{-}1\text{-}15)$$

$S_a(T,h)$ は一般に加速度応答スペクトル（図 13.1-1-1 参照）と呼ばれている．式(13.1-1-12)，式(5.1-1-14)および式(5.1-1-15)での積分に対しては，通常の地震計による地震加速度の記録は 0.01 秒程度の間隔でサンプリングされているので，この時間刻みを用いて数値積分するのが一般的である．

さて，特定の地震についての加速度応答スペクトルは，図 13.1-1-1 に示すように，地震波の周期と固有周期が一致したときに大きな応答値となるジグザクした曲線であるが，設計に用いる加速度応答スペクトルは特定の地震動に対するものでなく，過去に得られた地震動を地盤の種類ごとに統計処理し平滑化したもの（標準加速度応答スペクトル）が利用されており，道路橋示方書（耐震設計編）では，レベル 1 の地震動に対して設計に用いる加速度応答スペクトルは以下のように与えられている．

$$S=c_z c_D S_0 \qquad (13.1\text{-}1\text{-}16)$$

ここに，

$c_z$ ：地域別補正係数

$c_D$ ：減衰定数別補正係数，$c_D=\dfrac{1.5}{40h+1}+0.5$

$S_0$ ：標準加速度応答スペクトル（gal）で，図 13.1-1-2 のように与えられている．

**例題 13.1-2　多自由度系の振動**（基本問題）

多自由度系の自由振動問題における固有周期および固有振動モードはどのようにして求めるのかを示し、ついで固有振動モードの特性について述べよ。

**解答**

多自由度系の線形弾性体の非減衰自由振動の運動方程式は

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}+\mathbf{K}\mathbf{u}=\mathbf{0} \qquad (13.1\text{-}2\text{-}1)$$

ここに，$\mathbf{M}$ ：$n\times n$ 次数の質量マトリックスで，集中質量モデルを用いた場合は対角行列であり，$\mathbf{K}$ ：$n\times n$ 次数の剛性行列で，相反作用の定理により対称行列であり，$\mathbf{u}$ ：変位ベクトルである．

**例題 11.1-2** での式(11.1-2-4)を参照して，式(13.1-2-1)の解を $\mathbf{u}=\mathbf{X}\mathrm{e}^{-ipt}$，ただし $i=\sqrt{-1}$，$p$ ：円振動数，$\mathbf{X}$ ：振幅ベクトル，とおけば，

$$\left[\mathbf{K}-p^2\mathbf{M}\right]\mathbf{X}=\mathbf{0}$$ (13.13.2)上

式が $\mathbf{X}=\mathbf{0}$ 以外の解を持つためには

$$\left|\mathbf{K}-p^2\mathbf{M}\right|=0$$ (13.1-2-3)式

(13.1-2-3)は $p^2$ に関する $n$ 次方程式を与え，$\mathbf{K}$ が正値であれば，n 個の正根，すなわち

$$p_1^2 \le p_2^2 \le p_3^2 \le \cdots\cdots \le p_n^2$$ (13.1-2-4)を持つ．式(13.1-1-4)の正の平方根 $p_i$，$i=1,2,3,.....,n$ は固有円振動数と呼ばれ，固有周期 $T$，周波数 $f$ との関係は，

$$T_i=\frac{2\pi}{p_i},\quad f_i=\frac{p_i}{2\pi}$$ (13.1-2-5)で

ある．式(13.1-1-4)の $p_i^2$ を式(13.13.2)に代入すれば，$\mathbf{X}$ の振幅比を規定する n 組のベクトル

$$[\mathbf{X}]=[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3\cdots\cdots\mathbf{X}_n]$$ (13.1-2-6)を

得る．式(13.1-2-6)の $\mathbf{X}_i$ は固有振動モードまたは固有ベクトルと呼んでいる．

固有振動モードは以下の性質を持つ．いま，任意の２組の固有振動モード $\mathbf{X}_i,\mathbf{X}_j$，ただし $i=j$ を選び，式(13.13.2)に代入する．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathbf{K}\mathbf{X}_i&=p_i^2\mathbf{M}\mathbf{X}_i\\ \mathbf{K}\mathbf{X}_j&=p_j^2\mathbf{M}\mathbf{X}_j\end{aligned}$$ (13.1-2-7)上

式の両辺にそれぞれ $\mathbf{X}_i^T,\mathbf{X}_j^T$ を掛ければ，

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_j^T\mathbf{K}\mathbf{X}_i&=p_i^2\mathbf{X}_j^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i\\ \mathbf{X}_i^T\mathbf{K}\mathbf{X}_j&=p_j^2\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{X}_j\end{aligned}$$ (13.1-2-8)

$\mathbf{K},\mathbf{M}$ が対称行列であることを考慮し，両式の差をとれば，

$$\left(p_i^2-p_j^2\right)\mathbf{X}_j^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i^T=0$$ (13.1-2-9)

$p_i^2 \ne p_j^2$ であることより，

$$\mathbf{X}_j^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i=0$$ (13.1-2-10)上式

から，固有振動モードは質量マトリックスを介して直交しているといえる．

さて，式(13.13.2)より，$\mathbf{X}_i$ は振幅比のみを規定するモード形状を与えるが，振幅の大きさは不定である．したがって，任意のスカラー係数 $\gamma_i$ を $\mathbf{X}_i$ に掛けたベクトルもまた式 (13.13.2)を満足していることより，つぎのような固有振動モードを考える．

$$\mathbf{\Phi}_i=\gamma_i\mathbf{X}_i$$ (13.1-2-11)式

(13.1-2-10)より，

$$\mathbf{\Phi}_j^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i=0,\quad ただし i\ne j$$ (13.1-2-12)

さて，$\mathbf{\Phi}_i$ が以下の関係を持つような正規化された固有振動モードであるとき，

$$\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i=1\qquad i=1,2,3,\cdots\cdots,n$$ (13.1-2-13)

$\mathbf{\Phi}_i$ をこれを規準振動モードと呼んでいる．式(13.1-2-11)を上式に代入すれば，

$$\gamma_i^2\mathbf{X}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{X}_i=1$$ (13.1-2-14)

よって，以下の関係があることがわかる．

$$\gamma_i=\frac{1}{\sqrt{\mathbf{X}_i^T\mathbf{M}\mathbf{X}_i}}$$ (13.1-2-15)

したがって，式(13.1-2-11)で与えられる規準振動モードを式(13.1-1-2)に代入し，式(13.1-2-13)を考慮すれば，つぎの関係を得る．

$$\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_i=p_i^2\mathbf{\Phi}_i^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_i=p_i^2$$ (13.1-2-16)

**例題 13.1-3　応答スペクトル法（道示関連：耐震設計編，動的照査法）**

**例題 13.1-1** で示した 1 自由度系の地震応答問題で得た応答スペクトルを多自由度系の応答問題に適用する方法を述べよ．

**解答**

例題 13.1-1 で得られた加速度応答スペクトルを $S_a$，速度応答スペクトルを $S_v$，そして変位応答スペクトルを $S_u$ とすれば，式(13.1-1-12)，式(13.1-1-14)および式（13.1-1-15）よりつぎの関係を得る．

$$S_v = S_a / p\,,\quad S_u = S_a / p^2 \tag{13.1-3-1}$$

つぎに，上記の応答スペクトルを多自由度系の振動問題に適用する問題を考える．

n 次自由度系の振動モデルが地震加速度 $\ddot{z}$ を受けた時の運動方程式は

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R} \tag{13.1-3-2}$$

$$\mathbf{R} = -\ddot{z}\mathbf{M}\mathbf{I} \tag{13.1-3-3}$$

ここに，$\mathbf{I}$：地震動の作用方向に対応する要素が 1 で，他の要素がゼロのベクトルである．さて，前例題の式(13.1-2-13)および式(13.1-2-16)の関係を有する n 組の規準振動モードから成る次の行列を導入する．

$$[\mathbf{\Phi}] = [\mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{\Phi}_3 \cdots\cdots \mathbf{\Phi}_n] \tag{13.1-3-4}$$

$[\mathbf{\Phi}]$ は一般にモーダルマトリックスと呼ばれている．

式(13.1-2-13)および式(5.13.16)の関係より，モーダルマトリックスは以下の関係を有する．

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Phi}]^T \mathbf{M}[\mathbf{\Phi}] &= \mathbf{E} \\ [\mathbf{\Phi}]^T \mathbf{K}[\mathbf{\Phi}] &= \mathbf{\Lambda} \end{aligned} \tag{13.1-3-5}$$

ここに，$\mathbf{E}$：単位行列，$\mathbf{\Lambda}$：$p_i^2$ から成る対角行列である．

つぎに，モーダルマトリックスにより次の座標変換を行う．

$$\mathbf{u} = [\mathbf{\Phi}]\mathbf{q} = [\mathbf{\Phi}_1 \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{\Phi}_3 \cdots\cdots \mathbf{\Phi}_n][q_1 q_2 q_3 \cdots\cdots q_n]^T \tag{13.1-3-6}$$

式(13.1-3-6)を式(13.1-3-2)に代入すれば，

$$\mathbf{M}[\mathbf{\Phi}]\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}[\mathbf{\Phi}]\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}[\mathbf{\Phi}]\mathbf{q} = \mathbf{R} \tag{13.1-3-7}$$

上式の両辺に $[\mathbf{\Phi}]^T$ を掛けると，

$$[\mathbf{\Phi}]^T \mathbf{M}[\mathbf{\Phi}]\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{\Phi}]^T \mathbf{C}[\mathbf{\Phi}]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{\Phi}]^T \mathbf{K}[\mathbf{\Phi}]\mathbf{q} = [\mathbf{\Phi}]^T \mathbf{R} \tag{13.1-3-8}$$

ここで，減衰マトリックス $\mathbf{C}$ が次の形で与えられる場合を考える．

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \tag{13.1-3-9}$$

ここに，$\alpha$：質量マトリックスに比例する係数，$\beta$：剛性行列に比例する係数であり，この形の減衰を Rayleigh 減衰と呼んでいる．式(13.1-3-9)を式(5.1-3-7)に代入し，式(13.1-3-5)を考慮すれば，

$$\mathbf{E}\ddot{\mathbf{q}} + \alpha\mathbf{E}\dot{\mathbf{q}} + \beta\mathbf{\Lambda}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{q} = [\mathbf{\Phi}]^T \mathbf{R} \tag{13.1-3-10}$$

上式は $i = 1,2,3,\cdots\cdots,n$ の各規準振動モードごとに分解された非連成の微分方程式を与える．すなわち，

$$\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{q}}_i + 2h_i p_i \dot{\mathbf{q}} + p_i^2 \mathbf{q} = -\ddot{z}D_i \\ &i = 1,2,3,\cdots\cdots,n \end{aligned} \tag{13.1-3-11}$$

ここに，$2h_i p_i = \alpha + \beta p_i^2$，$D_i = \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M}\mathbf{I}$ で，$D_i$ は規準振動モード $i$ の全応答への寄与率であり，刺激係数とも呼ばれており，$D_i^2$ は有効質量とも呼ばれている．

さて，式(13.1-3-11)により，n 自由度系の問題は n 個の 1 自由度系の問題に分解できたので，各モードごとに 1 自由度系で求めた加速度応答スペクトルを利用することができるが，各モードの時間位相差は不明であるので，単純に重ね合わせることができない．そこで近似的に，各モードでの最大応答値の 2 乗和の平方根をもって全応答値とする手法がよく用いられている．すなわち，

$$\text{最大加速度応答値：}\ \overline{\mathbf{S}_a} = \left[\sum_{i=1}^{n} (D_i \mathbf{\Phi}_i S_a)^2\right]^{1/2} \tag{13.1-3-12}$$

最大速度応答値：　$\overline{\mathbf{S}_v} = \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( D_i \mathbf{\Phi}_i S_a / p_i \right)^2 \right]^{1/2}$　(13.1-3-13)

最大変位応答値：　$\overline{\mathbf{S}_u} = \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( D_i \mathbf{\Phi}_i S_a / p_i{}^2 \right)^2 \right]^{1/2}$　(13.1-3-14)

ここに，$S_a$：1 自由度系での加速度応答値で，各モードでの固有周期および減衰定数を用いて，**例題 13.1-1** で示した加速度応答スペクトルより決定する．

さらに，振動体の復元力に相当する内力 **Q** の最大応答値は

$$\overline{\mathbf{S}_Q} = \left[ \sum_{i=1}^{n} \left( D_i \mathbf{K} \mathbf{\Phi}_i S_a / p_i^2 \right)^2 \right]^{1/2} \qquad (13.1\text{-}3\text{-}14)$$

となる．