Chap. 12 振動と衝撃

12.1　振動に関する例題

例題 12.1-1　1 自由度系（基本問題）

図 12.1-1(a)に示すように、質量 M の物体がバネで支持された 1 自由度モデルにおける振動波形と固有周期を求めよ.

解答

物体が静止状態から下方への変位 $u(t)$ で運動しているときのつり合い条件は、図 12.1-1-1(b)の自由体図に示すように、バネ力 $ku(t)$ および慣性力 $M\ddot{u}(x)$ 、ここに k はバネ係数、$\ddot{u}(x) = d^2u(t)/dt^2$ は加速度であるので、つりあい条件式、すなわち運動方程式は

$$M\frac{d^2u(t)}{dt^2} + ku(t) = 0 \qquad (12.1\text{-}1\text{-}1)$$

上式を変形すると

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + \omega^2 u(t) = 0 \qquad (12.12.2)$$

ここに、

$$\omega = \sqrt{M/k} \qquad (12.1\text{-}1\text{-}3)$$

式(12.12.2)の解は

$$u(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad (12.1\text{-}1\text{-}4)$$

ここに、A，B は積分定数であり，　ω は円振動数（または振動数）で、次式の T は

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{k/M} \qquad (12.1\text{-}1\text{-}5)$$

固有周期と呼ばれている.

初期条件 u(0)=0 とすれば、A=0 となり、

$$u(t) = B\sin\omega t \qquad (12.1\text{-}1\text{-}6)$$

すなわち、図 12.1-1-1(a)の物体は片振幅 B、周期 T で正弦波の運動することがわかる（図 12.12.2 参照）.

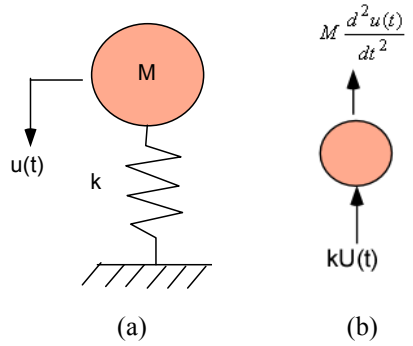

図 12.1-1-1 自由度系の振動モデル

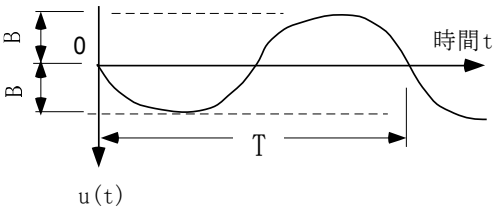

図 12.12.2 正弦波運動

例題 12.1-2　はりの振動 (基本問題)

支間長 l の等断面単純支持ばりの固有振動数と固有振動モードを求めよ.

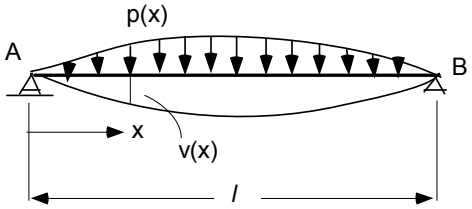

図 12.1-2-1　分布荷重を受ける単純支持はり

解答

図 12.1-2-1 に示すような、分布荷重強度 $p(x)$ を受ける等断面ばりの基礎微分方程式は

$$d^4v/dx^4 = p(x)/EI \qquad (12.1\text{-}2\text{-}1)$$

ここに、v ：たわみ関数、EI ：曲げ剛性である.

つぎに、単位長さ当たりの重量が γ であるはりがたわみ振動しているときの運動方程式は、式

(12.1-2-1)の $p(x)$ を慣性力に置き換え、以下のように与えられる.

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = -\frac{\gamma}{g}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \tag{12.1-2-2}$$

ここに、g ：重力加速度である．上式の一般解は時間関数 $q(t)$ と基準関数 $Y(x)$ の積として以下のように与えられる.

$$v = q(t)Y(x) \tag{12.1-2-3}$$

はりが自由振動しているときは、以下のように表される.

$$q(t) = A\cos\omega t + B\cos\omega t$$

$$v = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)Y(x) \tag{12.1-2-4}$$

ここに、ω：円振動数、A，B：初期条件から決定される定数で、$Y(x)$ は x のみの関数である．式(12.1-2-4)を式(12.12.2)に代入すれば、x についての４階の微分方程式を得る.

$$EI\frac{d^4 Y}{dx^4} - \omega^2\frac{\gamma}{g}Y = 0 \tag{12.1-2-5}$$

さらに、

$$a^4 = \frac{\gamma}{gEI}\omega^2 \tag{12.1-2-6}$$

とおき、

$$\frac{d^4 Y}{dx^4} - a^4 Y = 0 \tag{12.1-2-7}$$

Y の一般解は

$$Y = C_1\cosh ax + C_2\sinh ax + C_3\cos ax + C_4\sin ax \tag{12.1-2-8}$$

ここに、C_1 ～ C_4 は境界条件から決定される定数である.

ところで、支間長が l で、両端が単純支持のはりの境界条件は、

$x = 0$ で、$v = \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$ 、および $x = l$ で、$v = \frac{d^2 v}{dx^2} = 0$

であるので、$C_1 = C_2 = C_3 = 0$ で、

$$C_4\sin al = 0 \tag{12.1-2-9}$$

よって、$C_4 \neq 0$ の条件は、$al = i\pi \quad (i = 1,2,3,.....)$ を与え、式(12.1-2-6)より、円振動数は

$$\omega = a^2\sqrt{\frac{gEI}{\gamma}} = (\frac{i\pi}{l})^2\sqrt{\frac{gEI}{\gamma}} \tag{12.1-2-10}$$

固有周期は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2l^2}{i^2\pi}\sqrt{\frac{\gamma}{gEI}} \tag{12.1-2-11}$$

また、振動モードは

$$Y = C_4\sin\frac{i\pi x}{l} \tag{12.1-2-12}$$

となる．図 12.1-1-1 は 1 次(i=2)，2 次(i=2)および 3 次(i=3)の各振動モードを示しており、これらは弦の振動モードと同じである.

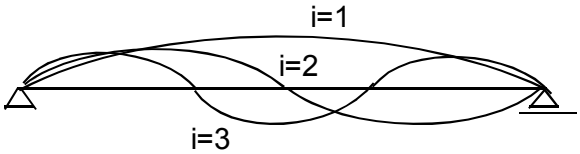

図 12.1-2-1　単純げたの振動モード

なお、単純支持以外はりに対しては、式(12.1-2-8)の C_1 ～ C_4 を該当する境界条件より求め、同様の手順により固有振動数および固有振動モードが決定できる.

12.2　衝撃に関する例題

例題 12.2-1　衝撃係数(道示関連：共通編、衝撃荷重)

道路橋示方書(共通編)での活荷重の載荷における衝撃係数 i はどのような定義に基づいたものであるのか簡単に述べよ.

解答

一般に衝撃係数 i とは、活荷重のように変動する荷重が作用した場合、荷重が静止した時の応答に対する動的応答の増幅率を意味するものである．弾性設計においては、荷重と変位は比例関係にあるので、図 12.2-1-1 に示すように、自動車荷重のような移動荷重の作用の下での最大静たわみに対する最大動たわみの比（動倍率と呼ぶ）から 1 を引いたものが衝撃係数 i としている．すなわち、

$$i = \frac{y_{d,\max}}{y_{s,\max}} - 1.0 \qquad (12.2\text{-}1\text{-}1)$$

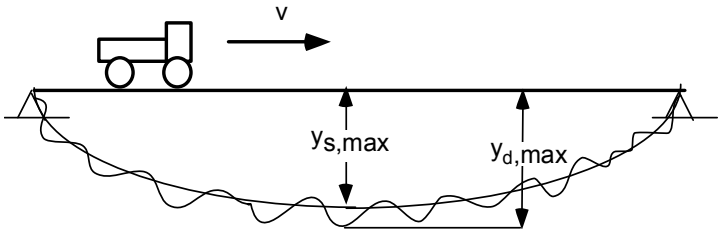

図 12.2-1-1　たわみの動倍率

衝撃荷重は静的荷重（P）に衝撃係数（i）を掛けたものであり、けたに作用する最大荷重は、

$$P_{\max} = P(1+i) \qquad (12.2\text{-}1\text{-}2)$$

で与えらえる.

衝撃係数は橋面の凹凸、車両の速度や加速・減速、前後車両の協同作用等種々の影響を受けるので純理論的に求めることが難しく、多くの実験データの統計処理によって定められている．道路橋示方書（共通編）では、けたの支間長を L とし、以下のように衝撃係数を与えている.

鋼橋に対しては、$i = \dfrac{20}{50+L}$　(T，L 荷重を適用)) (12.2-1-3)

鉄筋コンクリート橋に対しては、

$$i = \frac{20}{50+L} \quad \text{（T 荷重を適用)}, \quad i = \frac{7}{20+L} \quad \text{（L 荷重を適用）} \qquad (12.2\text{-}1\text{-}4)$$

例題 12.2-2　動倍率（道示関連：共通編、衝撃）

図 12.2-2-1 に示すように、集中荷重Ｐが等断面単純げたの上を滑らかに移動するとき、桁の動的応答は 1 次振動モードに支配されると仮定し、式(12.2-1-1)の衝撃係数の特性を調べよ.

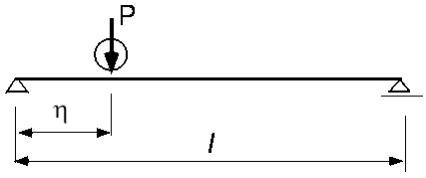

図 12.2-2-1　移動集中荷重を受ける単純げた

解答

荷重Ｐの移動速度をＶとし、初期 t=0 で左端にある P が任意時刻 t で距離η=Vt の位置にあるとする．車両の質量は橋桁の質量に比べて十分に小さいと考え車両質量の影響を無視し、さらに最大動たわみは 1 次の振動モード（i=1）に支配されると仮定すると、動たわみの一般形は以下のように表される.

$$v_d = q \sin \frac{\pi x}{l} \qquad (12.2\text{-}2\text{-}1)$$

ここに、q ：時間関数である．

1 次振動モードに対する移動荷重 P の換算荷重 Q とけたの換算質量 M を次式で与える．

$$Q = P\sin\frac{\pi Vt}{l}$$
$$M = \int_0^l \frac{\gamma}{g}\sin^2\frac{\pi x}{l}dx = \frac{\gamma l}{2g} \tag{12.2-2-2}$$

すると、強制力 Q で運動する質量 M の物体（図 12.1-1-1 と式 12.12.2 を参照）の運動方程式は以下のように与えられる．

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_1{}^2 q = \frac{Q}{M} \tag{12.2-2-3}$$

ここに、前例題での式(12.1-2-10)より、

$$\omega_1 = (\frac{\pi}{l})^2\sqrt{\frac{gEI}{\gamma}}$$

(12.2-2-4)よって、

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_1{}^2 q = \frac{2gP}{\gamma l}\sin\frac{\pi Vt}{l} \tag{12.2-2-5}$$

上式の解は

$$q = C\sin(\omega_1 t + \alpha) + \frac{2gP}{\gamma l}\frac{1}{\omega_1{}^2 - (\pi V/l)^2}\sin\frac{\pi Vt}{l} \tag{12.2-2-6}$$

ここに、C 、α は積分定数で、初期条件から決定される．いま、t=0 で桁は静止しているとすれば、動たわみは

$$v_d = \frac{2gP}{\gamma l}\frac{1}{\omega_1{}^2 - (\pi V/l)^2}\sin\frac{\pi Vt}{l}\sin\frac{\pi x}{l} \tag{12.2-2-7}$$

上式で、分母が 0 になるときは v_d は無限大になる．すなわち、

$$\frac{l}{V} = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{T_0}{2} \tag{12.2-2-8}$$

ここに、T_0 ：基本固有周期であり、荷重が桁を通過する時間が桁の基本固有周期の 1/2 に等しいときに、桁の振動が著しく大きくなることになるが、現実には桁の振幅が無限大になる前に荷重は通過してしまうことと、桁には減衰作用があることにより、無限大になることはない．

静的たわみの最大値 $\max v_s$ は荷重がスパン中央にあるときで、

$$\max v_s = \frac{Pl^3}{48EI} \tag{12.2-2-9}$$

したがって、式(12.2-1-1)の衝撃係数 i は式(12.2-2-7)および式(12.2-2-9)より、

$$i = \frac{\max v_d}{\max v_s} - 1 = \frac{96}{\pi^2}\cdot\frac{1}{\pi^2 - \gamma V^2 l^2/(gEI)} - 1 \tag{12.2-2-10}$$

すなわち、一つの集中荷重の通過に伴う衝撃係数は移動速度が大きくなるほど、またスパン長が大きくなるほど大きくなることになるが、実際にはスパンが長くなると複数台数の車両の影響を受け、台数が多くなれば動的な増幅率は互いに相殺し、式(12.2-1-3)及び式(12.2-1-4)での衝撃係数はスパン長に関して逓減させているのは台数の増加に伴う逓減率の増大を考慮しているものと推察できる．