

## 11.2 床版とスラブ

### 例題 11.2-1 平板の解析（基本問題）

道路橋示方書（鋼橋編）で示された橋の床版はT荷重で設計されるが、この場合の床版は、図 11.2-1-1 に示すように、主けたで支えられた板構造として取り扱われる。また、床版に作用する 1 組の T 荷重は図 11.2-1-2 に示すような占有幅を有し、橋軸直角方向に載せられるだけ載せるものとされている。T 荷重による床版の曲げモーメントの解析は平板理論に基づくとされているが、平板理論はどのようなものかを簡単に説明せよ。

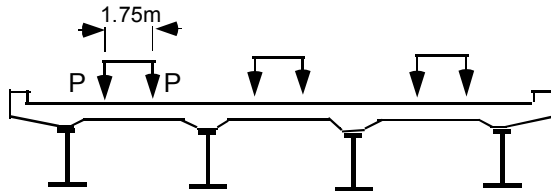


図 11.2-1-1 床版に作用する T 荷重

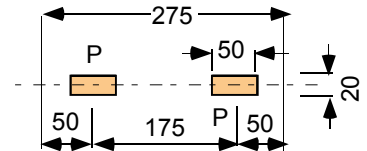


図 11.2-1-2 1 組の T 荷重

### 解答

辺長に比べて厚みの小さな平らな板（平板と呼ぶ）の理論には、板の面に垂直なせん断変形を影響無視したいわゆる“薄板理論”，せん断変形を考慮した“中等厚板理論”がある。コンクリート床版や鋼床版の設計には、通常、薄板理論が適用され、コンクリート床版には直交 2 方向の曲げ剛性が等しいとした”等方性板理論”が、鋼床版の設計には、直交 2 方向の曲げ剛性が異なる”直交異方性板理論”が適用されることが多い。以下、コンクリート床版を対象とし、輪荷重の作用の下での床版の曲げモーメント、ねじりモーメントおよび板の面に垂直なせん断力（横せん断力と呼ぶ）の特性について調べる。図 3.2-1-3 に示すように、板の中央面内に座標  $(x-y)$  をとり、分布荷重  $q(x, y)$  による中央面の下がり  $w(x, y)$  をたわみという。たわみは板厚  $h$  に比べて小さいと仮定する。図 3.2-1-4 に示すように微小要素  $dx dy$  に作用する断面力は、 $x$  軸方向の直応力  $\sigma_x$  による曲げモーメント  $M_x$ 、 $y$  軸方向の直応力  $\sigma_y$  による曲げモー

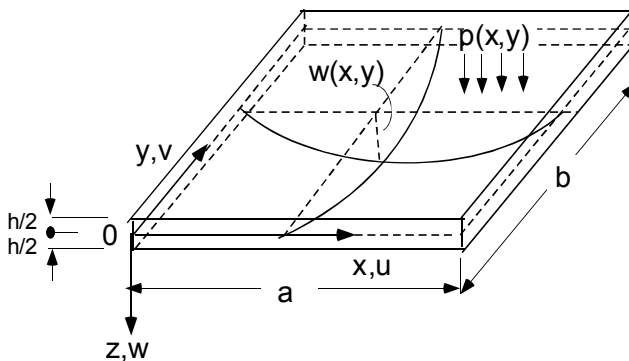


図 11.2-1-3 平板のたわみ

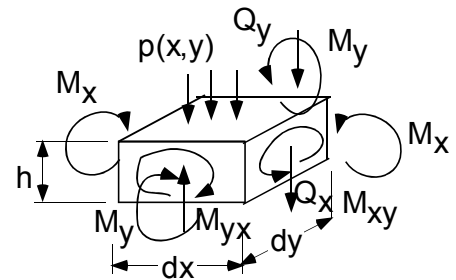


図 11.2-1-4 微小要素に作用する断面力

メント、せん断応力  $\tau_{xy}(=\tau_{yx})$  によるねじりモーメント  $M_{xy}(=M_{yx})$  ならびに横せん断力  $Q_x, Q_y$  である。すなわち、

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz, & M_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz, & M_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \\
 Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, & Q_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz
 \end{aligned}
 \tag{11.2-1-1}$$

ここに、曲げモーメントは下側 ( $z$  の正側) が引張になるものを正とし、ねじりモーメントは  $z$  の正側の  $y$  の正方向に向かうせん断力  $\tau_{xz}$  によるものを正とし、横せん断力は  $x$  または  $y$  の正の断面での  $z$  の正方向に向かうものを正としており、これらの断面力はいずれも切断面の単位幅についての断面力を示している。

さて、はりの場合と同様，“平面保持の仮定(Kirchhoff の仮定とも呼ばれる)”により，断面力と変形との関係は以下のように与えられる。

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -(1-\nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (11.2-1-2)$$

$$Q_x = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (11.2-1-3)$$

ここに，

$$D = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad E_c : \text{弾性係数}, \quad h : \text{板厚}, \quad \nu :$$

ポアソン比であり， $D$  は板剛性と呼ばれている。

式(3.2-1-2)を板要素に関するつり合い条件式

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -p(x, y) \quad (11.2-1-4)$$

ここに， $p(x, y)$  : 荷重分布強度，に代入すれば，以下の基礎微分方程式を得る。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (11.2-1-5)$$

長方形板の解析は上記の基礎微分方程式を所定の境界条件の下で解くことである。単純支持けた橋のコンクリート床版は，座標 $(x, y)$ を図11.2-1-5に示すようにとり， $x=0, a$ では単純支持されているものと見なすと，式(3.2-1-5)の一般解 $w$ は特解 $w_p$ と同時解 $w_1$ の和として表される。すなわち

$$w = w_p + w_1 \quad (11.2-1-6)$$

図11.2-1-2に示したようにT荷重は複数の長方形等分布荷重からなるので，個々の荷重分布を2重フーリエ級数で表せば，

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (11.2-1-7)$$

$$a_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(\bar{x}, \bar{y}) \sin \frac{m\pi \bar{x}}{a} \sin \frac{n\pi \bar{y}}{b} d\bar{x} d\bar{y} \quad (11.2-1-8) \text{上}$$

式を式(3.11.2-1-5)に代入すれば，式(11.2-1-6)での特解は

$$w_p = \frac{a^4 \lambda^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}}{(\lambda^2 m^2 + n^2)^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (11.2-1-9)$$

ここに， $\alpha_m = m\pi/a$ ,  $\beta_n = n\pi/b$ ,  $\lambda = b/a$ である。

一方，式(11.2-1-6)での同時解は，Levy解により，

$$w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cosh \alpha_m y + B_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + C_m \sinh \alpha_m y + D_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y) \sin \alpha_m x \quad (11.2-11.1)$$

ここに， $A_m, B_m, C_m, D_m$  : 積分定数で $y$ 軸に直角な辺の境界条件より決定されるが，図3.2-1-5のようにけたのついた床版では，左右の張り出し部と中央径間部の3つの領域に分けて，それぞれの領域に対して4つの積分定数の計12個の積分定数を $y=0, b$ での自由辺の条件，ならびに $y=\eta, b-\eta$ でのけた上の連続条件より決定しなければならない。

以下，幅 $b'$ の単一領域を取り上げ， $y=0, b'$ で任意の境界条件を持つ場合の曲げモーメントおよびねじりモーメント，ならびに横せん断力の各式を示すと，

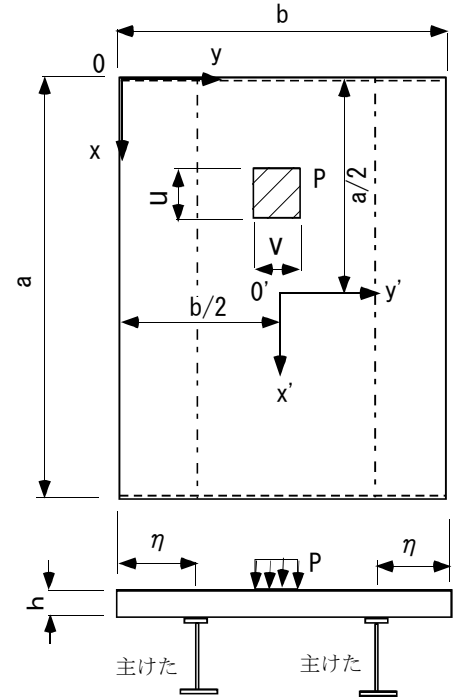


図11.2-1-5 単純支持けた橋の床版

$$M_x = \frac{a^2 \lambda^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda^2 m^2 + \nu n^2) a_{mn}}{(\lambda^2 m^2 + n^2)^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y + \frac{D \pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m^2 [(1-\nu)A_m - 2\nu B_m] \cosh \alpha_m y \right. \\ \left. + m^2 [(1-\nu)C_m - 2\nu D_m] \sinh \alpha_m y + m^2 (1-\nu)B_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + m^2 (1-\nu)D_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y \right\} \sin \alpha_m x \quad (11.2-1-11)$$

$$M_y = \frac{a^2 \lambda^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\nu \lambda^2 m^2 + n^2) a_{mn}}{(\lambda^2 m^2 + n^2)^2} \sin \alpha_m x \sin \beta_n y - \frac{D \pi^2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m^2 [(1-\nu)A_m + 2B_m] \cosh \alpha_m y \right. \\ \left. + m^2 [(1-\nu)C_m + 2D_m] \sinh \alpha_m y + m^2 (1-\nu)B_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y + m^2 (1-\nu)D_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y \right\} \sin \alpha_m x \quad (11.2-1-12)$$

$$M_{xy} = -\frac{a^2 \lambda^2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\nu) m n a_{mn}}{(\lambda^2 m^2 + n^2)^2} \cos \alpha_m x \cos \beta_n y - \frac{(1-\nu) \pi^2 D}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ m^2 [(A_m + B_m) \sinh \alpha_m y \right. \\ \left. + m^2 (C_m + D_m) \cosh \alpha_m y + m^2 B_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y + m^2 D_m \alpha_m y \sinh \alpha_m y \right\} \cos \alpha_m x \quad (11.2-1-13)$$

$$Q_x = \frac{a \lambda^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m a_{mn}}{\lambda^2 m^2 + n^2} \cos \alpha_m x \sin \beta_n y \quad (11.2-1-14)$$

$$- \frac{\pi^3 D}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} [2m^3 B_m \cosh \alpha_m y + 2m^3 D_m \sinh \alpha_m y] \cos \alpha_m x$$

$$Q_y = \frac{a \lambda}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n a_{mn}}{\lambda^2 m^2 + n^2} \sin \alpha_m x \cos \beta_n y \quad (11.2-1-15)$$

$$- \frac{\pi^3 D}{a^3} \sum_{m=1}^{\infty} [2m^3 B_m \sinh \alpha_m y + 2m^3 D_m \cosh \alpha_m y] \sin \alpha_m x$$

ここに、 $\alpha_m = m\pi/a, \beta_n = n\pi/b, \lambda = b'/a$  である。

### 例題 11.2-2 T 荷重による曲げモーメント (道示関連：鋼橋編，床版の曲げモーメント)

図 11.2-1-5 において T 荷重による正の最大曲げモーメントに着目した場合は、張り出し部の影響が少なく、主げた上およびけた端で単純支持された床版として取り扱うことができる。ところで、図 11.2-2-1 に示すような周辺単純支持帯状板に後輪荷重 ( $u=0.5\text{m}, v=0.2\text{m}$ ) が板中央に載った場合、板の中央線 A-A に沿った曲げモーメント  $M_x$  および B-B 線に沿った曲げモーメント  $M_y$  の分布を描き、板とはりでの曲げモーメント特性の相違を述べよ。

#### 解答

周辺単純支持長方形板のたわみ解は、式(11.2-1-6)で特解  $w_p$  のみ与えられ、非常に簡単に求められる。そこで、図 11.2-3-1 に示す後輪荷重が板中央に作用したとき、 $A_m = B_m = C_m = D_m = 0$  とおいて、式(11.2-1-11)および式(11.2-1-12)により、板中央線 A-A および B-B に沿った曲げモーメント分布求めると、図 11.2-3-2 および図 11.2-3-3 の結果を得る。これらの図からわかるように、輪荷重のよう局所分布荷重を受けるはりの曲げモーメントに比べて、板の曲げモーメントは荷重位置直下で集中し、荷重位置から離れると急速に減少することがわかる。また、荷重作用面が小さくなるにつれて、荷重面直下の曲げモーメントの集中度が大きくなり、荷重面が無限小になれば曲げモーメントが無限大 (ただし薄板理論の範囲内) になるという特性を示す。実際には荷重面が非常に小さくなる時は薄板理論は適用できず、3次元弾性理論の基づく厚板理論に頼らねばならないが、輪荷重の接地面の減少が床版の曲げ

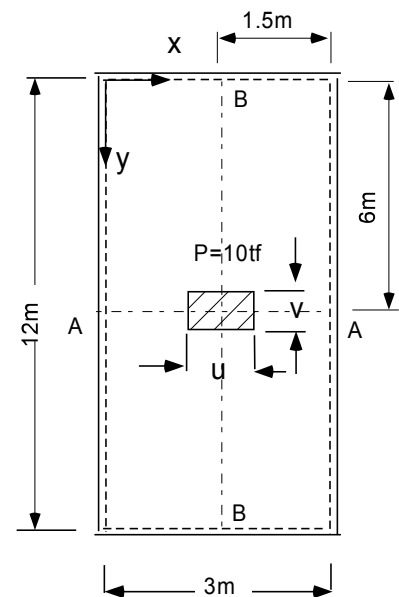


図 11.2-2-1 単純支持帯状板

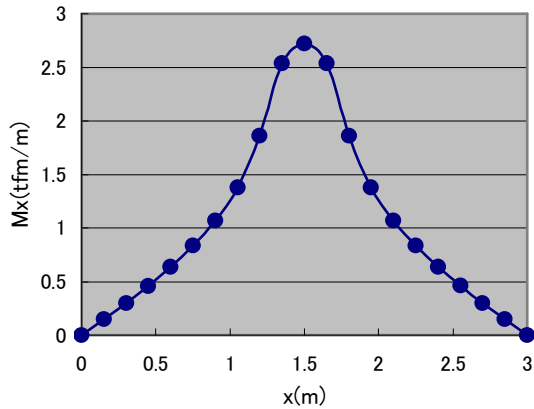


図 11.2-2-2 A-A 線上の  $M_x$  の分布図

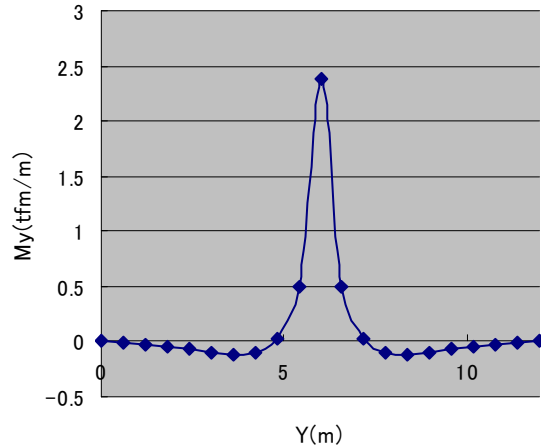


図 11.2-2-3 B-B 線上の  $M_y$  の分布図

モーメントの増大に寄与することは留意しなければならないと思われる。また、鉄筋コンクリート床版では主筋方向 (x 方向) と配筋方向 (y 方向) の最大曲げモーメントの比 ( $M_x:M_y$ ) は 1:0.87 程度であることもわかる。

**例題 11.2-3 断面力分布 (道示関連：鋼橋編，床版の曲げモーメント)**

周辺単純支持帯状板の後輪 1 個の下での正の曲げモーメントに関する級数解の収束性を調べ、ついで曲げモーメント、ねじりモーメントおよび横せん断力の分布特性を調べよ。

**解答**

前例題と同様、図 11.2-3-1 に示すような、幅  $b$  の周辺単純支持板で  $a/b$  が十分大きな帯状板 ( $a=4b$ ) に後輪 1 輪が載る問題を考える。図 11.2-3-2 は、 $a=10\text{m}, b=2.5\text{m}$  の長方形板に  $P=10\text{tf}$  の後輪 ( $u=0.2\text{m}, v=0.5\text{m}$ ) が板中央に載ったときの最大曲げモーメント (荷重直下に発生)  $M_x, M_y$  の計算値とフーリエ級数の項数  $m, n$  との関係調べたものであり、項数  $m, n=m$  が 50 程度採れば曲げモーメントは十分収束していることが分かる。

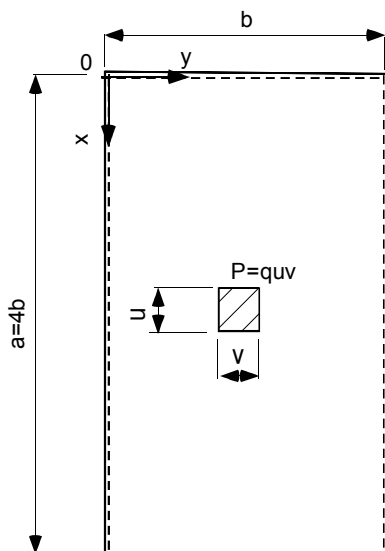


図 3.2-3-1 後輪荷重を受ける単純支持帯状板

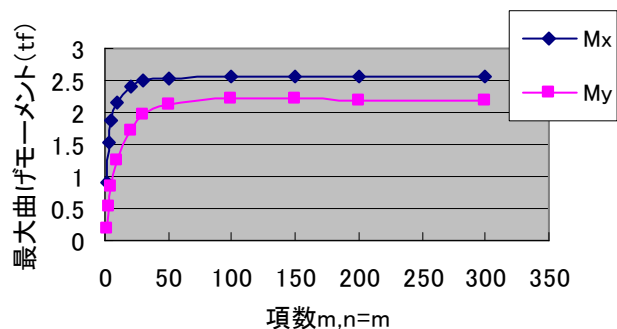


図 11.2-3-2  $x=a/2, y=b/2$  での曲げモーメントの収束性

つぎに、 $a=10\text{m}, b=2.5\text{m}$  の長方形板に後輪 1 輪 (ただし  $q=1.0\text{tf}$ ) が作用したときの曲げモーメント  $M_x, M_y$  およびねじりモーメント  $M_{xy}$ , ならびに横せん断力  $Q_x$  のコンター図を示したものが、図 11.2-3-3(a)-(d) である。これらの図より、曲げモーメント  $M_x, M_y$  の最大値は荷重直下で発生するが、ねじりモーメント

$M_{xy}$  の最大値は荷重中央から  $45^\circ$  傾いた方向の支持辺上で起こることが分かる。また、横せん断力  $Q_x$  の最大値は荷重分布の端部で発生し、それから離れるにつれて急速に減少していることも分かる。すなわち、輪荷重を受ける床版の曲げモーメントは荷重面中央または近傍で最大値を採り、荷重面から離れることによってその値が急速減少し、はりとは異なる特性をもつことに留意する必要がある。

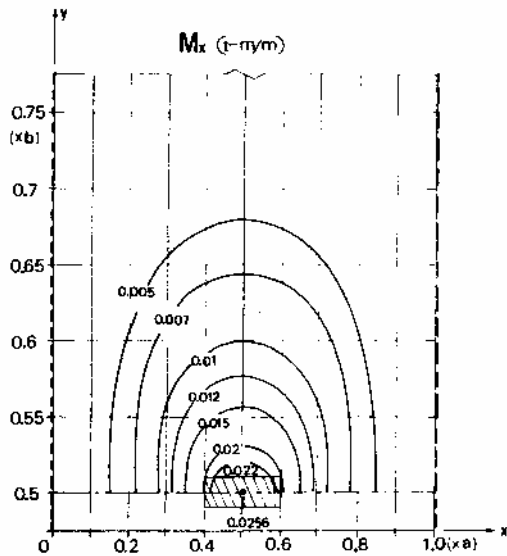


図 11.2-3-3(a)  $M_x$  のコンター図

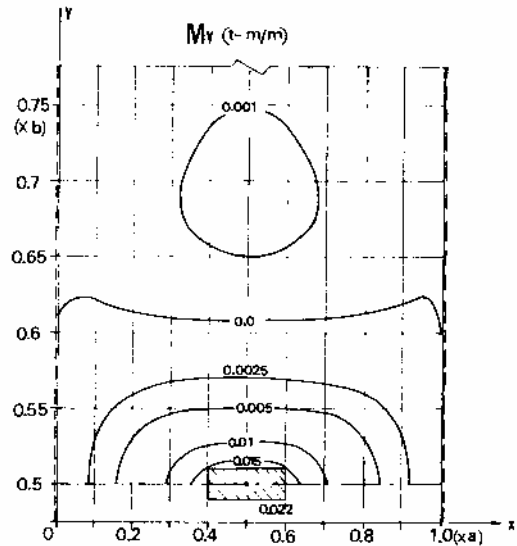


図 11.2-3-3(b)  $M_y$  のコンター図

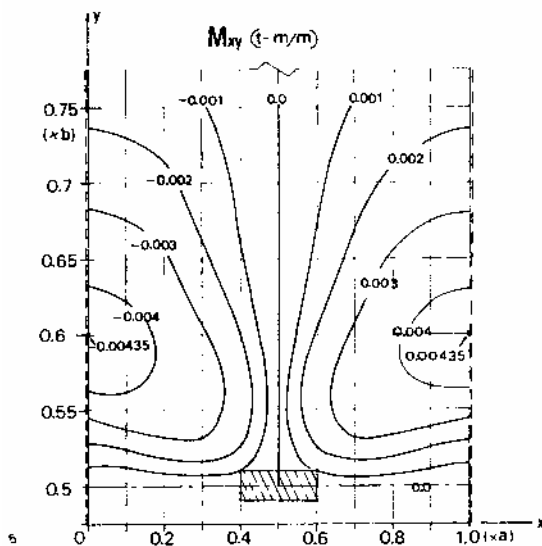


図 11.2-3-3(c)  $M_{xy}$  のコンター図

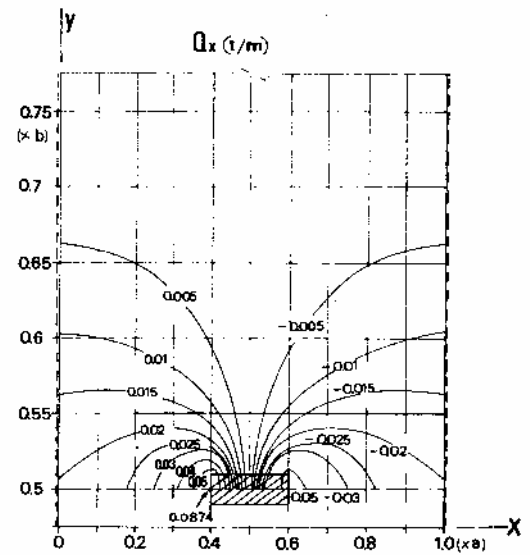


図 11.2-3-3(d)  $Q_x$  のコンター図

#### 例題 11.2-4 設計曲げモーメント (道示関連：床版の設計曲げモーメント)

道路橋床版 (鋼橋偏) 8.2.4 床版の設計曲げモーメントでは、T 荷重 (衝撃を含む) による床版の単位幅 (1m) あたりの設計曲げモーメント式が与えられているが、これほどどのようにして求められたのかを示せ。

また、最近注目されている 2 主げた橋の床版の曲げモーメントでは、主げた間長の増大につれて床版曲げモーメントがどのように変化するかを調べよ。

解答

図 11.2-1-2 に示したように、1 組の T 荷重の占有領域は幅員方向に 2.75m であるので、主げた間長に応じて T 荷重の載荷台数が異なる。図 11.2-4-1 は 2 主げた橋の場合の載荷台数の概要を示したものである。最縁の荷重は床版の端から 50cm だけ入った位置にあり、道路橋示方書（鋼橋編）での床版の設計曲げモーメントは、最大の正または負の曲げモーメントが発生するような T 荷重の可能な載荷台数に対して、前例題で示した平板理論による解析を行い、得られた結果にある安全率を考慮して定められている。いま、主げた間の床版の正の曲げモーメントに着目すれば、主げた間長  $l$  が 2m から 12m の場合の最大曲げモーメントを与える位置（着目位置）と T 荷重の載荷台数を求めると図 11.2-4-2 のようになる。 $l=2m$  の場合は 1 台のみで後輪が支間中央にあるときに最大曲げモーメントを与えるが、 $l=12m$  になると、5 台の T 荷重によって最大曲げモーメントが発生することになる。道路橋示方書の適用範囲は  $l \leq 4m$  であるが、最近では、少数主げた橋で支間長の大きい PC 床版が利用される機会も多いことから、図 11.2-4-2 のような  $l \leq 12m$  の範囲における主筋方向および配力筋方向のそれぞれの最大曲げモーメントを前例題で示した解析法により求め、解析結果に 10% 程度の割り増しを行ったものと道路橋示方書の式との比較を行ったものが、図 11.2-4-3 および図 11.2-4-4 である。なお、図における道路橋示方書の式は以下のように与えている。

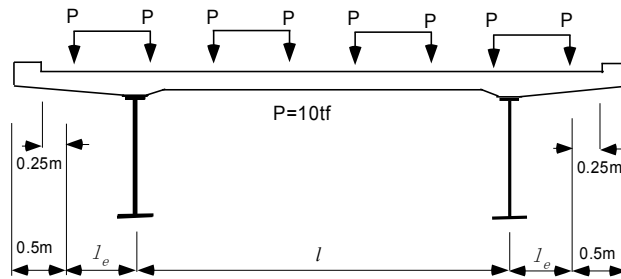


図 11.2-4-1 T 荷重の載荷要領

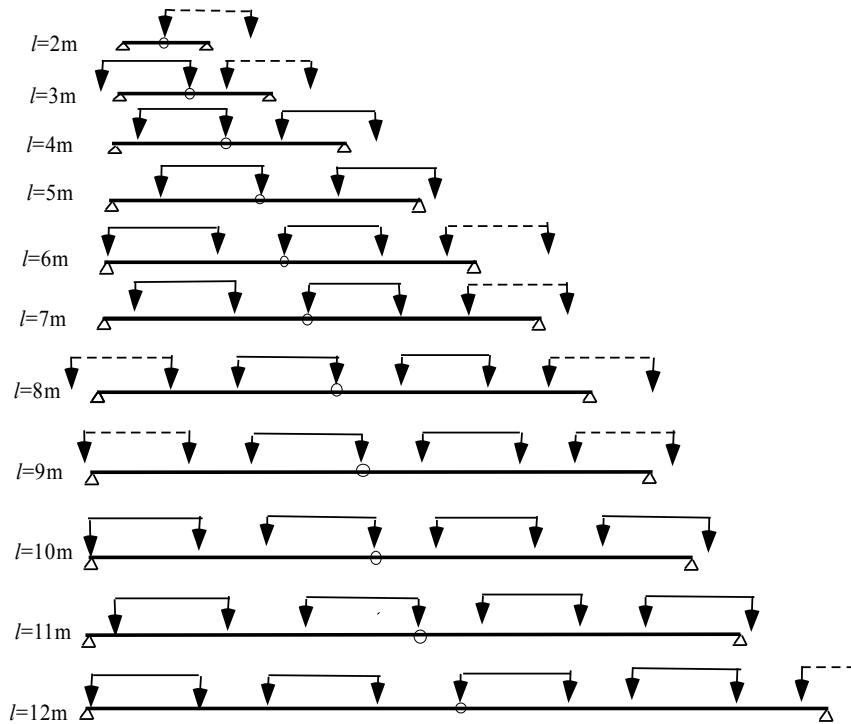


図 11.2-4-2 正曲げモーメントに対する T 荷重の載荷方法と着目位置

a) 主筋方向の曲げモーメント  $M_x$  (tf・f・m )

$$M_x = (0.12l + 0.07)P, 0 \leq l \leq 12m$$

b) 配力筋方向の曲げモーメント  $M_y$  (tf・m/m)

$$M_y = (0.10l + 0.04)P, 0 \leq l \leq 4m$$

$$M_y = (0.11l - 0.02)P, 6m \leq l \leq 12m$$

ここに、 $P = 10tf$  である。

これらの図より、道路橋示方書の設計曲げモーメント式は平板理論による解析値に 10%程度割り増したものにほぼ対応していることがわかる。

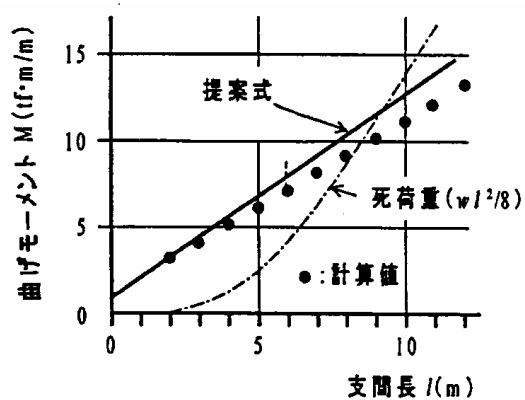


図 11.2-4-3 主筋方向の最大曲げモーメント

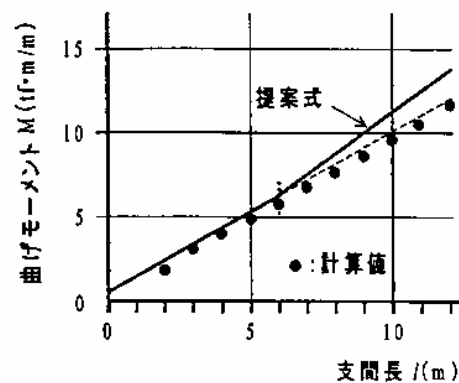


図 11.2-4-4 配力筋方向の最大曲げモーメント

例題 11.2-5 斜板