

Chap. 10 鋼部材と座屈

10.1 座屈に関する例題

例題 10.1-1 用語の定義 (基本問題)

座屈とはどのような現象を言うのか？また、座屈に関連する用語である、“分岐”、“屈服”、“飛移”、“後座屈強度” などについて簡単に述べよ。

解答

部材または部材を組み合わせた構造物がゼロから徐々に増大する荷重強度を受けたとき、最初は一定の変形モードにしたがって変形量が増大していくが、荷重強度がある大きさに到達したとき急に別の変形モードが現れ、このモードが不安定になって部材または構造物がそれ以上の荷重強度を支持できなくなる現象を“**座屈**”と言い、この時の荷重強度を“**座屈強度**”、不安定変形モードを“**座屈モード**”と言う。座屈は断面寸法に比して長さの大きい部材が軸方向圧縮荷重を受けたときに起こりやすい。

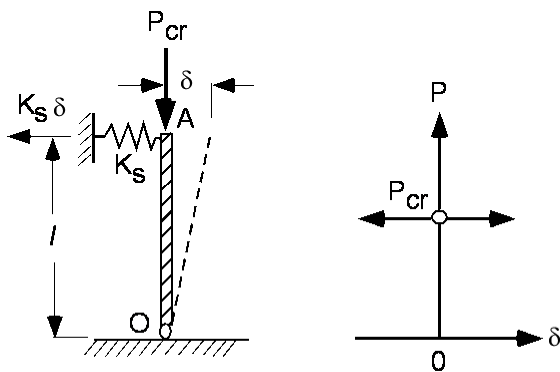


図 10.1-1-1 1自由度系の分岐座屈問題

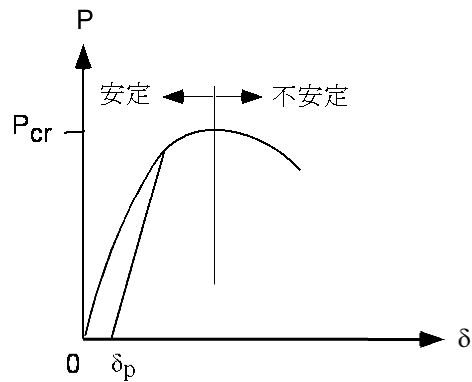


図 10.1-1-2 屈服現象

なぜ座屈が起こるのであろうか？この質問に答えるために、図 10.1-1-1 に示すような下端がヒンジで上端が水平バネ（バネ係数 K_s ）で支持された長さ l の剛な柱が上端で断面の図心に鉛直圧縮荷重（中心圧縮荷重と呼ぶ） P を受ける問題を考える。柱が剛であるので、曲がることはなく、この柱の可能な変形モードは図に示すような水平に倒れるモードのみで、一自由度系の問題になる。いま、極く僅かな外乱によって柱の上端が極くわずかな水平変位 δ を受けたとき、下端 O に関して柱を転倒させようとするモーメント M_s 、および柱を元の真っ直ぐな状態に戻そうとする復元モーメント M_r は、それぞれ、 $M_s = P\delta$ 、 $M_r = K_s\delta \cdot l$ である。したがって、 $M_r < M_s$ の場合、すなわち $P < K_s l$ の時は、 δ を取り除けば元の状態になるという安定な挙動を示すが、 $M_r > M_s$ の場合、すなわち $P > K_s l$ の時は、元の状態には帰らず転倒してしまう。両者のモーメントが同じであるとき、すなわち $P = K_s l$ は中立の状態と言われ、この時の荷重 $P_{cr} = K_s l$ を真っ直ぐな状態から横倒れする変形モードへの分岐が起こり、

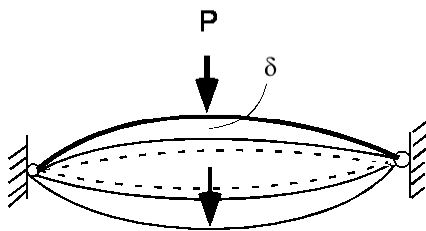


図 10.1-1-3 扁平なアーチ

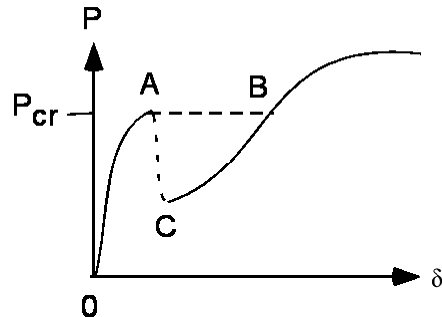


図 10.1-1-4 飛び移り現象

このときの荷重を分岐荷重と呼んでいる。図に示したように、バネ係数 K_s が引張に対しても圧縮に対しても同じである場合は左右の変形モードの発生はタイであるが、もし圧縮より引張の方がバネ係数が小さい場合には必ず右方向の変形モードに支配される。

以上のように、“分岐”とは、荷重強度が座屈強度になったとき安定な変形モードから別の不安定（場合によっては安定）変形モードに突然に移り変わる現象で、真っ直ぐな弾性柱が断面中心に圧縮荷重を受ける場合に発生し、分岐現象は座屈と呼ばれている。

ところで、実際の柱は、完全に真っ直ぐでもなく、また荷重が図心からわずかにずれていることもある。このような初期状態でのたわみ、荷重の偏心量や溶接による残留応力などは、一般に“初期不整”とよばれている。初期不整がある柱では、もはや分岐現象は起こらず、荷重強度が低い段階からたわみが発生し、荷重とたわみの関係は一般的に図 2-1-1-2 のようになる。すなわち、最大荷重 P_{cr} になるまでは、荷重を取り除けば、弾性部材では完全に元の形状に復元し、弾塑性部材でもある程度復元し、塑性成分のみ変形が残留する。このように微小な外乱に対して微小な変形が発生しても外乱を取り除けば元の状態に復元する状態を安定と呼ぶ。しかし、荷重が P_{cr} を超えると、もはや変形を持続できず、荷重を下げない限り静止できない状態を不安定と呼ぶ。安定系から不安定系に移行する現象を“屈服”と呼び、この時の荷重を屈服荷重と呼んでおり、屈服荷重は初期不整のない場合の分岐荷重より小さくなる。

“飛移”とは、図 2-1-1-3 に示すようなライズの低い扁平なアーチが圧縮荷重を受けた場合には、荷重の小さい範囲では、荷重の増大につれてたわみが増大するが、ある荷重を超えると、急にアーチリブの曲率が反転し、引張り部材としての釣合い状態に飛び移る。このような現象を飛移と呼んでいる。図 2.1-1-4 には、一般的な荷重－たわみ関係を示すが、単調増加荷重では、A 点から B 点に飛び移るときの荷重 P_{cr} が屈服荷重となり、それ以上の荷重は支持できなくなる。しかし、荷重点のたわみを制御するような荷重を行えば、図の A 点から C 点に荷重が下がった後に、引張り部材としての安定系の下で B 点に移行し、飛移なる現象が発生する。

以上に述べたように、“屈服”も“飛移”も圧縮荷重を受けた部材での安定な変形状態から別の不安定または安定な変形状態に移行する現象であり、これらも広義の座屈として知られている。

一方、図 2.1-1-5 に示すような、強固な補剛材を持つ薄い板が圧縮荷重 p を受けた場合、座屈強度 p_{cr} に達した後に異なる機構に移行して耐力を保持し、さらに荷重が増加して終局耐力 p_{ult} に達することが知られている。このような挙動を後座屈挙動と呼び、 p_{ult} を後座屈強度と呼ばれている。

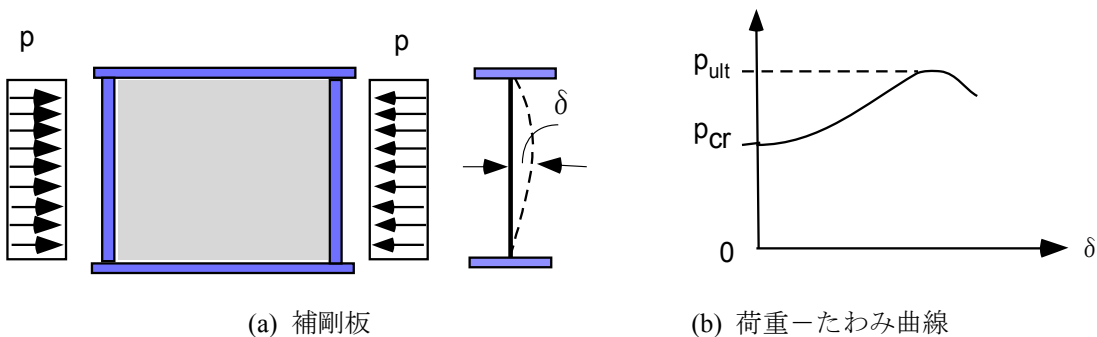


図 10.1-1-5 後座屈挙動

例題 10.1-2 中心圧縮柱(基本問題)

図 10.1-2-1 に示すような長さ L の真っ直ぐな弾性柱が両端において中心圧縮荷重を受ける問題はオイラー問題と呼ばれ、最も基本的な柱の分岐座屈問題である。この問題における座屈荷重 P_{cr} と座屈モード $v(x)$ はどのようにして決定するのかを示せ。

解答

分岐座屈の解析は、座屈による変形状態でのつり合い問題として取り扱う。一般に任意の端部支持条件を持つ中心圧縮柱の座屈に関する基礎微分方程式は

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad (10.1-2-1)$$

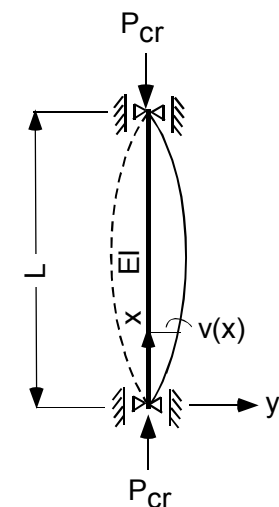


図 10.1-2-1 中心圧縮柱の座屈

ここに、 v は座屈時のたわみ、 $k^2 = P_{cr} / EI$ である。上式の一般解は次式で与えられる。

$$v = A + Bx + C \cos kx + D \sin kx \quad (10.1-2-2)$$

積分定数 A, B, C, D は上、下端の支持条件より求められる。

最初に図 10.1-2-1 に示す両端回転支持柱を取り上げると、上、下端の条件はたわみと曲げモーメントがともにゼロになることより

$$[v]_{x=0} = [v]_{x=L} = \left[\frac{d^2v}{dx^2} \right]_{x=0} = \left[\frac{d^2v}{dx^2} \right]_{x=L} = 0 \quad (10.1-2-3)$$

式(10.1-2-2)を式(10.1-2-3)に代入すれば、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2 & 0 \\ 1 & L & \cos kL & \sin kL \\ 0 & 0 & -k^2 \cos kL & -k^2 \sin kL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.1-2-4) \text{上式}$$

で積分定数 A, B, C, D がともにゼロではない解を持つためには係数行列式の値がゼロでなくてはならず、これより $A = B = C = 0$ および $D \sin kL = 0$ を得る。したがって、座屈条件式は

$$\sin kL = 0 \quad (10.1-2-5)$$

$k = \sqrt{\frac{P_{cr}}{EI}}$ のゼロでない最小根は、 $kL = \pi$ となり、座屈荷重は

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EI \quad (10.1-2-6) \text{と}$$

なり、座屈モード（波形）は

$$v = D \sin \frac{\pi}{L} x \quad (10.1-2-7) \text{とな}$$

り、これを図示すれば図 10.1-2-1 のようになる。すなわち、回転支持柱の座屈モードは柱高さを半波長とする正弦波で与えられる。

つぎに、両端固定柱の場合は、端部条件がたわみとたわみ角がともにゼロであることより

$$[v]_{x=0} = [v]_{x=L} = \left[\frac{dv}{dx} \right]_{x=0} = \left[\frac{dv}{dx} \right]_{x=L} = 0 \quad (10.1-2-8) \text{式}$$

(10.1-2-2)を上式に代入すれば、積分定数間にはつぎの条件が課せられる。

$$\begin{aligned} A + C &= 0, & B + Dk &= 0 \\ A + BL + C \cos kL + D \sin kL &= 0 \\ B - Ck \sin kL + Dk \cos kL &= 0 \end{aligned} \quad (10.1-2-9) \text{上式}$$

で A, B, C, D がともにゼロでないためには係数行列式がゼロでなくてはならず、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 1 & L & \cos kL & \sin kL \\ 0 & 1 & -k \sin kL & k \cos kL \end{bmatrix} = 0 \quad (10.1-2-10) \text{上}$$

式を展開すれば、

$$\sin \frac{kL}{2} \cdot \left(\frac{kL}{2} \cos \frac{kL}{2} - \sin \frac{kL}{2} \right) = 0$$

上式より、

$$\sin \frac{kL}{2} = 0 \quad \text{または} \quad \tan \frac{kL}{2} = \frac{kL}{2} \quad (10.1-2-11)$$

を与え、式(10.1-2-11)の前者は対称モードに対する根を、後者は逆対称モードに対する根を与える。しかしながら物理的に意味を持つのは最小根であり、最小根は対称モードでの $kL = 2\pi$ であり、式(10.1-2-9)より、 $B = D = 0, C = -A$ 、また、式(10.1-2-2)より座屈モードは次式で与えられ、図示すれば図 10.1-2-3 のようになる。

$$v = A \left(1 - \cos \frac{2\pi}{L} x \right) \quad (10.1-2-12)$$

$kL = 2\pi$ は座屈荷重

$$P_{cr} = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 EI$$

(10.1-2-13)を

与えるので、柱高さが $L/2$ の両端回転支持柱の座屈荷重と同じになる。
同様に、上端が回転支持で下端が固定の柱の境界条件は

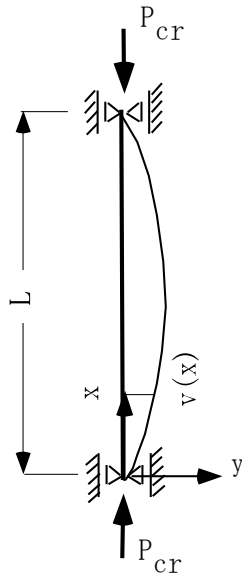


図 10.1-2-2 両端回転支持柱

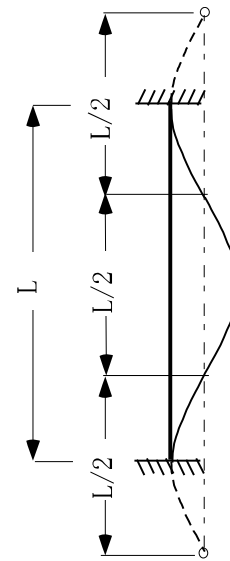


図 10.1-2-3 両端固定柱

$$[v]_{x=0} = \left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=0} = 0, \quad [v]_{x=L} = \left[\frac{d^2v}{dx^2}\right]_{x=L} = 0 \quad (10.1-2-14)$$

式(2.1-2-2)を上式に代入すれば、

$$\begin{aligned} A + C &= 0, & B + Dk &= 0 \\ A + BL + C \cos kL + D \sin kL &= 0 \\ -Ck^2 \cos kL - Dk^2 \sin kL &= 0 \end{aligned} \quad (10.1-2-15)$$

上式において、 A, B, C, D がともにゼロないための条件は

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ 1 & L & \cos kL & \sin kL \\ 0 & 0 & -\cos kL & -\sin kL \end{vmatrix} = 0 \quad (10.1-2-16)$$

上式を展開すれば、

$$kL \cos kL - \sin kL = 0$$

表 10.1-3-1 柱の有効座屈長 βL (道路橋示方書 鋼橋編による)

	1	2	3	4	5	6
座屈形が点線のような場合						
β の理論値	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
β の推奨値	0.65	0.8	1.2	1.0	2.1	2.0

すなわち、

$$\tan kL = kL \quad (10.1-2-17)$$

を与える。式(10.1-2-17)は座屈条件式であり、その最小根は

$$kL = 4.493 \quad (10.1-2-18)$$

であり、座屈荷重は

$$P_{cr} = \frac{20.19}{L^2} EI \quad (10.1-2-19)$$

となり、式(10.1-2-2)、式(10.1-2-9)および式(2.1-2-18)より、座屈モードは

$$v = A\left(1 - \frac{x}{L} - \cos \frac{4.493x}{L} + 0.223 \sin \frac{4.493x}{L}\right) \quad (10.1-2-20)$$

となる。

以上、端部の支持条件の異なる座屈荷重をまとめて以下のように表示する。

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{\beta L}\right)^2 EI \quad (10.1-2-21)$$

ここに、 βL は有効座屈長と呼ばれており、両端回転支持柱の場合が $\beta=1$ 、両端固定柱では、 $\beta=0.5$ 、一端固定で多端が回転支持の柱では、 $\beta \approx 0.7L$ となり、 βL が正弦波の半波長に相当する座屈長を意味しており、座屈荷重の大きさは有効座屈長の2乗に反比例することが分かる。

例題 10.1-3 初期不整の影響(道示関連：鋼橋編，鋼材の許容応力度)

道路橋示方書鋼橋編での表一解3.2.2(表10.1-3-1に再掲)において有効座屈長は理論値より推奨値が大きく採っている根拠を述べ、柱端部の回転拘束度と有効座屈長の関係を調べよ。

解答

表10.1-3-1に示すように、固定端を有する柱での設計に用いる有効座屈長の推奨値は理論値より大きく採られている。この理由は実際の構造部材ではたわみ角が完全にゼロとなるような完全固定の条件が存在しないことによる。もし座屈時に端部がほんの少しでも回転すると完全固定条件は失われるので、理論値を設計に用いると過大な座屈荷重を与えることになる。したがって、道路橋示方書では安全側の配慮により有効座屈長は理論値より大きく採ることを推奨している。たとえば、両端固定柱の回転拘束が不完全でたわみ角がゼロでないモデルとして、図10.1-3-1に示すような弾性回転バネで支えられたモデルを例として取り上げる。

前例題において両端固定柱の座屈モードは柱中央点に関して対称モードであるので、本モデルでも対称モードを仮定する。上、下の拘束モーメントを M_0 とし、回転バネ係数を K_θ とすれば、

$$M_0 = K_\theta \theta_0$$

ここに、

$$\theta_0 = \left[\frac{dv}{dx} \right]_{x=0} \quad (10.1-3-1)$$

図に示した自由体図より、任意断面 x での曲げモーメントは

$$M_x = P_{cr}v - K_\theta \theta_0 \quad (10.1-3-2)$$

弾性則と釣り合い条件より

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{P_{cr} - K_\theta \theta_0}{EI} \quad (10.1-3-3)$$

前問と同様、 $k^2 = \frac{P_{cr}}{EI}$ とにおいて変形すると、つぎの

2階の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = k^2 \frac{K_\theta \theta_0}{P_{cr}} \quad (10.1-3-4)$$

上式の一般解は

$$v = A \cos kx + B \sin kx + \frac{K_\theta \theta_0}{P_{cr}} \quad (10.1-3-5)$$

また、上式の微分は

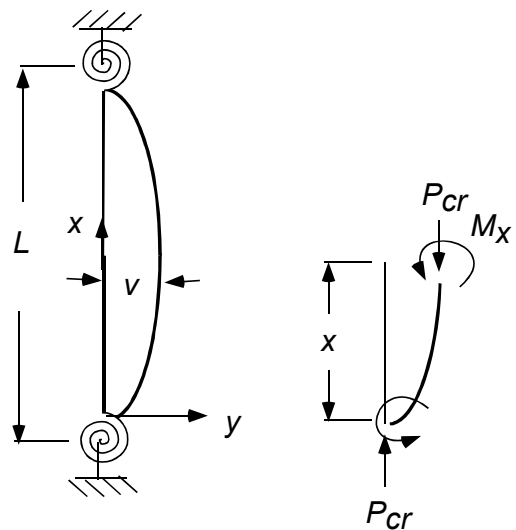


図 10.1-3-1 弾性的な回転拘束をもつ柱

$$\frac{dv}{dx} = -Ak \sin kx + Bk \cos kx$$

端部条件： $[v]_{x=0} = [v]_{x=L} = 0$, $\theta_0 = \left[\frac{dv}{dx} \right]_{x=0}$ より、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{K_\theta}{P_{cr}} \\ \cos kL & \sin kL & \frac{K_\theta}{P_{cr}} \\ 0 & k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ \theta_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.1-3-6)$$

上式において A, B, θ_0 がともにゼロでない条件（座屈条件）として、次式を得る。

$$k \frac{K_\theta}{P_{cr}} = \frac{\sin kL}{\cos kL - 1} \quad (10.1-3-7)$$

表 10.1-3-1 において両端固定柱の有効座屈長の推奨値は $\beta L = 0.65L$ となっているので、この値に相当する回転拘束度 (K_θ) を求めると、

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{0.65L} \right)^2 EI, \quad k = \frac{\pi}{0.65L}$$

より、

$$K_\theta = \frac{\pi EI}{0.65L} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{0.65}}{\cos \frac{\pi}{0.65} - 1} = 5.45 \frac{EI}{L} \quad (10.1-3-8)$$

となる。すなわち、完全固定端は $K_\theta = \infty$ を意味し、その時の有効座屈長は $\beta L = 0.5L$ であるが、推奨値 $\beta L = 0.65$ になるということは、両端の回転拘束度が式(2.1-3-8)に低減していることに相当している。

10.2 鋼材の許容圧縮応力度に関する例題

例題 10.2-1 許容応力度（道示関連：鋼橋編，鋼材の許容応力度）

道路橋示方書（鋼橋編）では、局部座屈を考慮しない許容軸方向圧縮応力度 σ_{ca} (N/mm²) は、板厚 40mm 以下の SS400 材に対して以下のように与えている。

$$\begin{aligned} \frac{l}{r} \leq 18 \text{ に対して、} & \sigma_{ca} = 140 \\ 18 \leq \frac{l}{r} \leq 92 \text{ に対して、} & \sigma_{ca} = 140 - 0.82 \left(\frac{l}{r} - 18 \right) \\ \frac{l}{r} \geq 92 \text{ に対して、} & \sigma_{ca} = \frac{1,200,000}{6,700 + \left(\frac{l}{r} \right)^2} \end{aligned} \quad (10.2-1-1)$$

ここに、応力の単位は N/mm²、 l/r は柱の細長比である。ところで、初期不整が無い場合には、上式では安全率がどのように採られているかを述べ、ついで初期たわみの大きさと安全率の変化について調べよ。

解答

I 形や箱形断面からなる鋼柱の座屈は、柱部材としての座屈と、断面内のフランジやウェブの板としての座屈に分けられ、前者は全体座屈、後者は局部座屈と呼ばれている。

いま、全体座屈に着目すると、座屈荷重の低減の要因として、荷重の偏心、初期たわみ、残留応力などの初期不整が考えられる。ところで、初期不整が全く無い中心圧縮柱の弾性座屈荷重は前述の式(2.1-2-21)より、有効座屈長を l とすれば、

$$P_{cr} = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI \quad (10.2-1-2)$$

柱の断面積を A とすれば、座屈時の応力（座屈応力）は

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = E\pi^2 \frac{1}{(l/r)^2} \quad (10.2-1-3)$$

ここに、 $r = \sqrt{I/A}$ で回転半径と呼ばれ、 l/r は細長比と呼ばれている。柱断面には二つの主軸（例題 参照）が存在するので、 σ_{cr} がもっとも小さくなる場合、すなわち有効座屈長が大きく、かつ断面 2 次モーメントの小さな方の軸（弱軸）に座屈応力が支配される。

さて、SS400 材の降伏点（ σ_y ）を 240N/mm^2 とすれば、式(2.2-1-1)での座屈危険性のない極く短柱（ $l/r \rightarrow 0$ ）の安全率 s は

$$s = 240/140 \approx 1.7 \quad (10.2-1-4)$$

となる。一方、式(2.2-1-3)は弾性座屈理論によるものであり、弾性係数 $E = 2 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ とすれば、適用範囲は $\sigma_{cr} \leq \sigma_y = 240 \text{N/mm}^2$ であり、細長比の適用範囲は、

$$l/r \geq \pi\sqrt{E}/15.5 \approx 10.2 \quad (10.2-1-5)$$

となる。ただし、SS400 材の応力-ひずみ曲線での比例限界点は降伏点より若干小さいので、適用範囲は限界細長比は上式より若干大きくなる。

以上の結果を図示すれば、図 10.2-1-1 を与える。

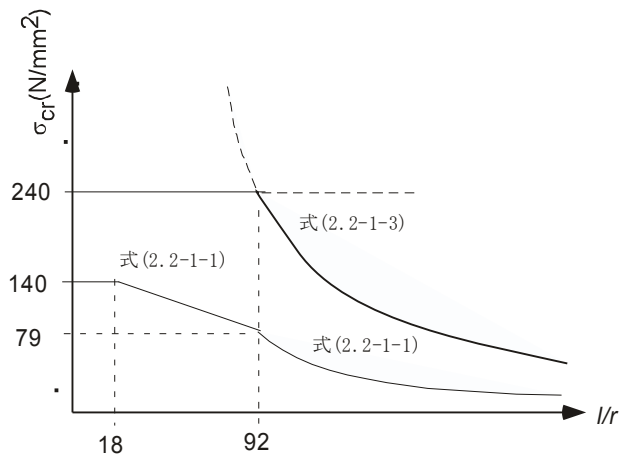


図 10.2-1-1 圧縮強度曲線と許容応力度曲線

つぎに初期不整が初期たわみのみである場合について、初期たわみによる前述の安全率の変化について考察する。初期たわみを以下のように仮定し、

$$v_0 = \delta_0 \sin \frac{\pi}{l} x \quad (10.2-1-6)$$

圧縮荷重 P の下でのつり合い条件式は

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = -\frac{P}{EI}(v + v_0) \quad (10.2-1-7)$$

$k^2 = P/EI$ とおいて、上式を書き改めれば、

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + k^2 v = -k^2 \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (10.2-1-8)$$

上式の一般解は特解と同時解の和として与えられ、

$$v = A \cos kx + B \sin kx + \frac{(kl)^2}{\pi^2 - (kl)^2} \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (10.2-1-9)$$

l は有効座屈長であるので、両端の条件は回転支持として取り扱えるので、

$$[v]_{x=0} = [v]_{x=l} = \left[\frac{d^2 v}{dx^2} \right]_{x=0} = \left[\frac{d^2 v}{dx^2} \right]_{x=l} = 0$$

より、 $A = B = 0$ となり、

$$v = \frac{(kl)^2}{\pi^2 - (kl)^2} \delta_0 \sin \frac{\pi x}{l} \quad (10.2-1-10)$$

曲げモーメント式は

$$M_z = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{\pi^2 \delta_0 P}{\pi^2 - (kl)^2} \sin \frac{\pi x}{l} \quad (10.2-1-11)$$

柱の断面積を A 、断面係数を Z とすれば、最大圧縮応力は柱中央断面の縁で発生し、

$$\sigma_{\max} = P \left[\frac{1}{A} + \frac{\pi^2 \delta_0 EI}{Z(EI\pi^2 - Pl^2)} \right] \quad (10.2-1-12)$$

上記の最大圧縮応力が降伏点 (σ_y) に到達したときの弾性限界荷重は

$$P_e = \frac{A\sigma_y(1+\gamma\beta)}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma\beta)^2}} \right] \quad (10.2-1-13)$$

ここに、 $\gamma = \pi^2 EI / (A\sigma_y l^2)$ 、 $\beta = 1 + A\delta_0 / Z$ である。

たとえば、細長比が $l/r = 91$ の時の柱の軸方向圧縮強度は初期たわみがゼロの場合は $P_{cr} = A\sigma_y$ であったので、初期たわみ δ_0 での強度低減率 η は

$$\eta = \frac{1+\gamma\beta}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\gamma}{(1+\gamma\beta)^2}} \right] \quad (10.2-1-14)$$

となる。一般に γ は 1.0 に比して十分大きな値であるので、微小な δ_0 に対して、 $\eta \cong 1/\beta$ と表せる。たとえば、 $A\delta_0/Z = 0.1$ とすれば、 $\eta = 0.91$ となる。細長比が極端に小さい極く短柱では、断面縁が塑性領域に入ったときに限界耐力にはならず、全断面が塑性状態になるまで耐荷力が上昇するので、初期たわみの影響は緩慢であるが、図 10.2-1-1 での限界細長比付近では断面の一部が塑性化すれば急速に不安定なるので、耐荷力は初期たわみの影響に敏感になる。実際の柱の初期不整は初期たわみのみならず、荷重の偏心、残留応力など定量化しにくい要因に支配されるので、理論のみで初期不整の影響を考慮することは困難であり、多くの実験データの統計的処理によって安全サイドの曲線として式(10.2-1-1)の許容応力度式が与えられている。

例題 10.2-2 薄板の座屈 (道示関連：鋼橋編，部材の設計)

道路橋示方書 (鋼橋編)，4 章部材の設計では板厚 40mm 以下の SS400 材からなる両縁支持板の局部座屈に対する許容応力度 σ_{ca} (N/mm²) が以下のように規定されている。

$$\begin{aligned} \frac{b}{38.7f} \leq t \text{ に対して、} \sigma_{ca} &= 140 \\ \frac{b}{80f} \leq t \leq \frac{b}{38.7f} \text{ に対して、} \sigma_{ca} &= 210,000 \left(\frac{t}{b} \right)^2 \end{aligned} \quad (10.2-2-1)$$

ここに、 t ：板厚(mm)、 b ：板の固定縁間距離(mm) (図 10.2-2-1 参照)、 f ：応力勾配による係数で

$f = 0.65\varphi^2 + 0.13\varphi + 1.0$ 、 φ ：応力勾配、 $\varphi = (\sigma_1 - \sigma_2) / \sigma_1$ 、 σ_1, σ_2 ：両縁の応力 (図 10.2-2-1 参照) である。 $\varphi = 0$ である場合の一様な圧縮応力を受ける単純支持板の局部座屈の理論値を求めよ。

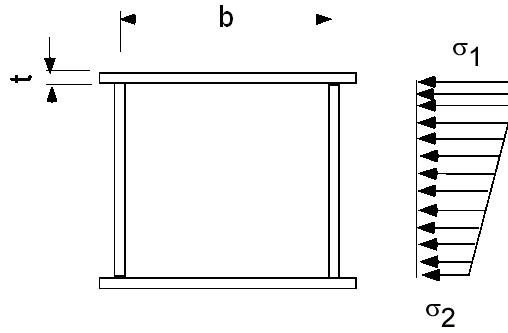


図 10.2-2-1 板の縁応力度

解答

図 10.2-2-1 の断面での圧縮フランジ板は断面垂直方向に一樣（応力勾配がゼロ）な圧縮応力 σ_1 を受けた両縁回転支持板と見なせる。そこで、フランジの板厚を t とし、図 10.2-2-2 に示すような周辺が回転支持された板が一樣圧縮力 $N_x = \sigma_1 t$ を受ける弾性座屈問題を考える。

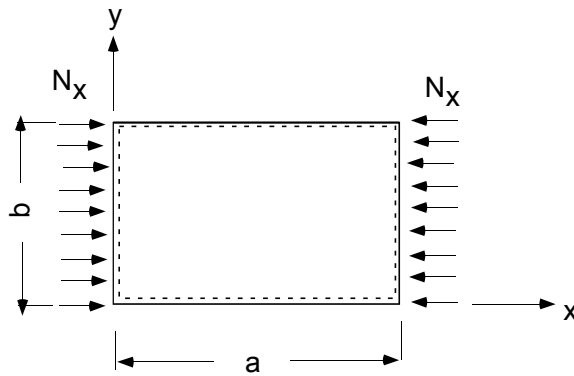


図 10.2-2-2 一樣圧縮力を受ける単純支持板

等方性板の微小たわみに関するつり合いの偏微分方程式は

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = - \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (10.2-2-2)$$

ここに、 w : 座屈時のたわみ、 D : 板剛性 ($= \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$)、 E : 弾性係数、 ν : ポアソン比である。板

の周辺が回転支持されているので、境界条件は

$$\begin{aligned} [w]_{x=0} = [w]_{x=a} = [w]_{y=0} = [w]_{y=b} = 0 \\ \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=0} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{x=a} = 0, \quad \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{y=b} = 0 \end{aligned} \quad (10.2-2-3)$$

あり、これらの条件を満足する式(10.2-2-2)の解はつぎの形で与えられる。

$$w = C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10.2-2-4)$$

ただし、 $m, n = 1, 2, 3, \dots$ である。上式を式(2-2-2-1)に代入し、係数 C_{mn} がゼロでないための条件として次式を得る。

$$N_x = \frac{D\pi^2 a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (10.2-2-5)$$

上式は無数の N_x を与えるが、最小値のみが物理的な意味を持つので $n=1$ とおき、次式を得る。

$$N_x = k \frac{D\pi^2}{b^2}, \quad k = \left(m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \quad (10.2-2-6)$$

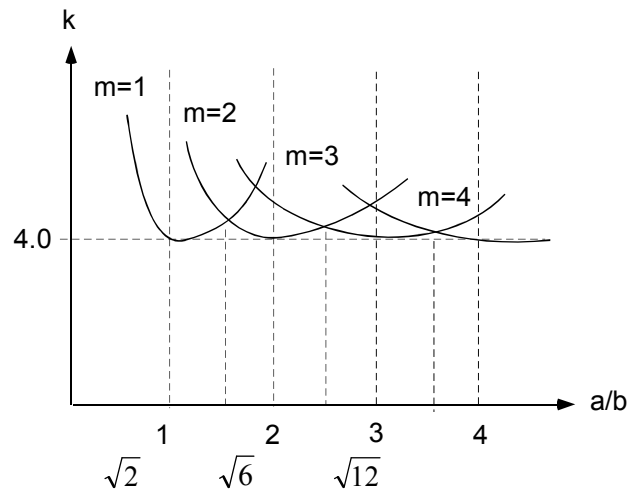


図 10.2-2-3 座屈係数と辺長比との関係

任意の辺長比 (a/b) に対する式(10.2-2-6)の座屈係数 k の最小値を示したものが図 10.2-2-3 である。辺長比が $a/b=1, 2, 3, \dots$ と整数であるとき $k=4.0$ となり、整数と整数の間値では 4.0 より若干上昇しているが、 $a \geq b$ の単純支持板の座屈荷重はほぼ次式で表せる。

$$N_{cr} = 4.0 \frac{D\pi^2}{b^2} = \frac{4\pi^2}{b^2} \cdot \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (10.2-2-7)$$

また、座屈波形 (モード) は式(10.2-2-4)より、

$$1 \leq a/b \leq \sqrt{2} \text{ では、 } w = w_0 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

$$\sqrt{2} \leq a/b \leq \sqrt{6} \text{ では、 } w = w_0 \sin \frac{2\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

$$\sqrt{6} \leq a/b \leq \sqrt{12} \text{ では、 } w = w_0 \sin \frac{3\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y$$

となり、座屈波形は荷重直角方向に正弦半波長が b となる波形であり、荷重方向には長さ b ごとに節を持つ波形であることが分かる。したがって、座屈強度を増加させるには辺長 b を低減することが非常に効果的であるが、辺長 a (ただし、 $a > b$) の影響はほとんど受けないといえる。

座屈応力 $\sigma_{cr} (= N_{cr} / t)$ は

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 Et^2}{3b^2(1-\nu^2)} \quad (10.2-2-8)$$

であり、弾性理論に基づく座屈応力は幅厚比 (b/t) の 2 乗に反比例することが分かる。

例題 10.2-3 各種境界条件を持つ薄板の座屈強度 (道示関連：鋼橋編，部材の設計)

周辺単純支持（回転支持）以外の長方形弾性板の座屈強度は単純支持板に比べてどのように変わるかを述べよ。

表 10.2-3-1 一方向圧縮荷重を受ける長方形板の座屈係数 k

4 辺固定	a/b k	0.5 18.3	0.75 11.4	1.0 10.08	1.25 9.94	1.5 8.30	1.75 8.08	2.0 7.87	∞ 6.99	
$x=0, a$ が回転支持、 $y=0, b$ が固定	a/b k	0.5 7.75	0.625 7.04	0.667 6.98	0.713 7.06	1.0 8.08	2.0 7.30	3.0 7.42	∞ 7.30	
$x=0, a$ が固定 $y=0, b$ が回転支持	a/b k	0.6 13.38	0.8 8.73	1.0 6.74	1.2 5.84	1.4 5.45	1.6 5.34	1.8 5.18	2.0 4.85	3.0 4.42
$y=0$ が固定、他の 3 辺が回転支持	a/b k		0.728 5.47	0.79 5.41	0.889 5.51					
$y=b$ が自由、他の 3 辺が回転支持	a/b k	0.5 4.40	1.0 1.44	1.2 1.14	1.4 0.952	1.6 0.835	1.8 0.755	2.0 0.698	3.0 0.546	5.0 0.506
$y=0$ が固定、 $y=b$ が自 由、他 2 辺が回転支持	a/b k	1.0 1.70	1.1 1.56	1.2 1.47	1.3 1.41	1.4 1.36	1.5 1.34	2.0 1.38	2.5 1.59	

解答

周辺回転支持以外の境界条件を持つ長方形弾性板の座屈強度は式(10.2-2-2)を所定の境界条件より求められるが、その解析は周辺単純支持板に比して煩雑になる。既往の研究によって求められた座屈強度は式(10.2-2-7)と同様な形式で以下のように表すことができる。

$$\sigma_{cr} = N_{cr} / t = k \frac{D\pi^2}{tb^2} = k \frac{\pi^2 Et^2}{12b^2(1-\nu^2)} \quad (10.2-3-1)$$

ここに、 k は座屈係数と呼ばれており、単純支持板（ただし、 $a \geq b$ ）で 4.0 になる。一様圧縮荷重 $N_x = \sigma_x t$ を受ける各種の境界条件をもつ長方形板の座屈係数を表 2.2-3-1 にまとめておく。

式(10.2-3-1)は弾性理論に基づくものであるので、 $\sigma_{cr} \leq \sigma_y$ 、 σ_y ：降伏強度、のときのみ有効である。

表 10.2-3-1 から分かるように、単純支持板に比べると、固定辺を有する板の座屈強度は大きくなるが、自由辺を有する板の座屈強度は非常に小さくなる場合があることが分かる。たとえば、図 10.2-3-1 に示すように、I 形げたのフランジや補剛リブのように、自由突出板が圧縮応力を受ける場合は、表 10.2-3-1 の $y=b$ が自由、他の 3 辺が回転支持で a/b が大きくなる場合に相当し、座屈係数が非常に小さくなる。

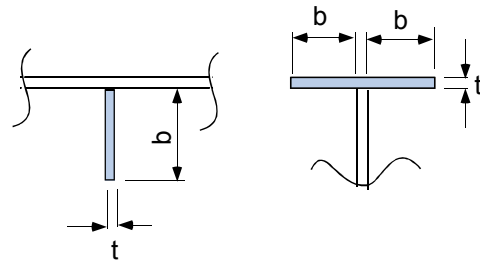


図 10.2-3-1 自由突出板の例

道路橋示方書，鋼橋編，部材の設計では、自由突出板の局部座屈に対する許容圧縮応力度 σ_{ca} (N/mm²) は、

SS400 材で板厚 40mm 以下に対して、以下のように規定されている、

$$b/t \leq 12.8 \text{ に対して、} \sigma_{ca} = 140$$

$$12.8 \leq b/t \leq 16 \text{ に対して、} \sigma_{ca} = 23,000 \left(\frac{t}{b} \right)^2 \quad (10.2-3-2)$$

幅厚比の最大値が 16 であり、単純板の場合の 80 に比べて非常に小さくなっていることが分かる。

例題 10.2-4 局部座屈強度 (道示関連，鋼橋編，部材の設計)

道路橋示方書，鋼橋編，部材の設計では、局部座屈に対する許容応力度の基準耐荷力曲線が以下のように与えられている。

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} / \sigma_y &= 1.0 & (R \leq 0.7) \\ \sigma_{cr} / \sigma_y &= 0.5/R^2 & (R > 0.7) \end{aligned} \quad (10.2-4-1)$$

ここに、

$$R = \frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E} \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2 k}} \quad (10.2-4-2)$$

b : 板幅(mm)、 t : 板厚(mm)、 σ_y : 鋼板の降伏強度(N/mm²)、 E : ヤング係数(N/mm²)、 ν : ポアソン比、 k : 座屈係数 (単純支持板の場合 4.0、自由突出板の場合 0.43) である。

以上のような基準耐荷力曲線の意義、ならびに前述の式(10.2-2-1)で示した局部座屈に基づく許容圧縮応力度と基準耐荷力曲線とを比較し、安全率を調べよ。

解答

式(10.2-4-2)の R は、式(10.2-3-1)による座屈強度(σ_{cr})が降伏強度(σ_y)に等しくなる幅厚比(b/t)が $R=1.0$ になるように基準化したパラメータで、一般に幅厚比パラメータと呼ばれている。実際の鋼部材では、初期たわみ、荷重の偏心、残留応力などの避けがたい初期不整が存在するので、 $R>1$ の領域でも部分的な塑性領域が発生し、いわゆる弾塑性座屈挙動を示す。また、初期不整量の影響を受け、座屈強度はばらつくので、多くの実験値を統計的に処理し、 $R \geq 0.7$ の領域で、式(2.2-3-1)の理論座屈強度の1/2を取り、安全側の配慮により基準耐荷力曲線が定められたものである。

つぎに、式(2.3-3-1)に基づいて、前述の式(10.2-2-1)の許容圧縮応力度での安全率を調べてみる。たとえば、SS400材の単純支持長方形板($k=4.0$)に対して、 $E=2 \times 10^5$ N/mm²、 $\nu=0.3$ とにおいて式(2.3-3-2)の幅厚比パラメータを求めると、

$$R = 0.018 \frac{b}{t} \quad (10.2-3-3)$$

道路橋示方書の許容圧縮応力度である式(10.2-2-1)と初期不整のない弾性理論座屈強度である式(2.2-2-8)および式(2.3-3-1)を比較を示したものが図 10.2-3-1 である。図より道路橋示方書における安全率 s は $0 \leq b/t \leq 39$ で $s=1.71$ 、 $b/t=80$ で $s=1.76$ になっていることが分かる。

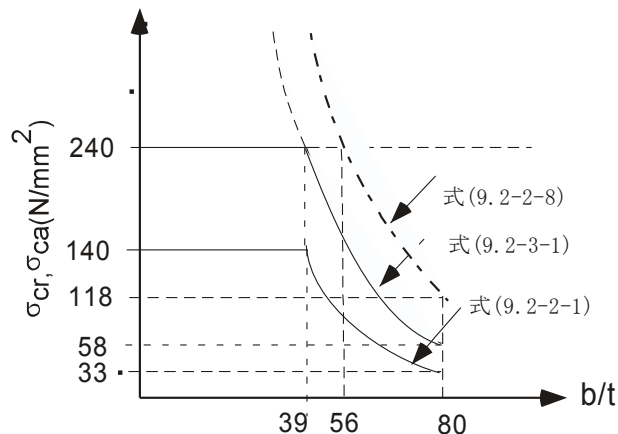


図 10.2-4-1 幅厚比と基準耐荷力および許容応力度の関係